

Анализ пыле-акустических солитонов с учётом самосогласованного заряда пылевых частиц с использованием рядов Тейлора и функции Ламберта

Ф. М. Трухачёв^{1,2}, М. М. Васильев^{1,3}, О. Ф. Петров^{1,3} и Е. Ю. Севрюгов^{1,3}

¹ Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., 13, стр.2, Москва 125412, Россия

² Государственное учреждение высшего профессионального образования «Белорусско-Российский университет», проспект Мира, 43, Могилев 212000, Беларусь

³ Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский пер., 9, Долгопрудный 141701, Россия

E-mail: ftru@mail.ru

Статья поступила в редакцию 23 ноября 2018 г.

Аннотация. Проведён анализ МГД модели плазмы, описывающей пыле-акустические солитоны в трёхкомпонентной плазме. Получены численные солитонные решения уравнения Пуассона с учётом самосогласованного заряда пылевых частиц. Для описания самосогласованного заряда использованы как приближение рядов Тейлора, так и точное выражение с использованием функции Ламберта. <https://doi.org/10.33849/2018105>

1. ВВЕДЕНИЕ

Пылевой плазмой принято считать плазму, содержащую заряженные частицы микронных и субмикронных размеров, наряду с электронами и ионами [1]. Прикладная значимость исследований пылевой плазмы связана с технологическими приложениями [2]. Фундаментальная значимость определяется, во-первых, исследованиями в рамках концепции активных частиц, а во-вторых, доступностью экспериментальных инструментов для исследования общих свойств плазмы [2]. Так, пылевая плазма позволяет на кинетическом уровне с использованием видеосъемки исследовать волновые процессы, неустойчивости плазмы, закономерности взаимодействия волна-частица и т.д. Например, в [3] экспериментально подтверждён эффект ускорения заряженных частиц пыле-акустическими солитонами, предсказанный ранее теоретически для ионно- и электроно-акустических солитонов [4, 5]. Указанные моды во многом подобны друг другу, поскольку их свойства определяются инертностью частиц одной из плазменных популяций. Частоты пыле-акустических волн лежат в диапазоне 1–100 Гц [6], что делает их удобным объектом для исследования. В простейших случаях заряд пыли считают постоянным, однако, для описания процессов в рамках концепции активных частиц, модели с самосогласованным зарядом пыли оказываются более предпочтительными. С различными моделями нелинейных волн можно ознакомиться в обзоре [7]. Отметим, что применение моделей с самосогласованным зарядом [7, 8] сопряжено с рядом математических трудностей, обсуждение которых и подробная методика анализа пыле-акустических волн в рамках таких моделей является предметом исследования предлагаемой статьи.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим плазму, содержащую электроны, ионы и пылевые частицы радиуса r_d [7, 8]. Будем считать, что заряд частиц определяется электронными и ионными токами на их поверхность согласно [9]. Будем также считать, что электроны и ионы имеют Максвелловское рас-

пределение, а дрейф частиц и магнитное поле отсутствуют. В поле относительно медленной пыле-акустической волны их концентрации можно описать распределением Больцмана:

$$N_e(\Phi) \equiv n_e/n_{e0} = \exp(\sigma_i \Phi) \quad (1)$$

$$N_i(\Phi) \equiv n_i/n_{i0} = \exp(-\Phi) \quad (2)$$

где n_j, n_{j0}, T_j — концентрации, начальные концентрации и температуры частиц сорта j ($j = e, i, d$ для электронов, ионов и пылевых частиц соответственно), $\Phi = e\phi/T_i$ — нормированный потенциал, $\sigma_i = T_i/T_e$. Для описания динамики пыли воспользуемся системой МГД уравнений с самосогласованным зарядом пылевых частиц [7]:

$$\frac{\partial v_d}{\partial t} + v_d \frac{\partial v_d}{\partial x} = Z \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial N_d}{\partial t} + \frac{\partial N_d v_d}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

где v_d — скорость пылевой компоненты, нормированная на пыле-акустическую скорость, которая определяется выражением $c_d = (Z_0 T_i / m_d)^{1/2}$; m_d — масса пылевых частиц; Z_0 — невозмущенный заряд пыли; Z — заряд пыли, нормированный на Z_0 ; t и x нормированы на ω_d^{-1} и λ_D соответственно, где $\lambda_D = (T_i / 4\pi Z_0 n_{d0} e^2)^{1/2}$ — радиус Дебая, $\omega_d = (4\pi n_{d0} Z_0^2 e^2 / m_d)^{1/2}$ — плазменная частота для пылевой компоненты. В самосогласованном случае Z определяется электронными и ионными токами на поверхность частиц. Указанные токи, в свою очередь, определяются $n_{e,i}$, $T_{e,i}$. Полагая $T_{e,i}$ постоянными и используя для $n_{e,i}$ выражения (1), (2), из условия равенства электронных и ионных токов $I_e + I_i = 0$ можно связать Z и Φ выражением [7]:

$$\Phi = \frac{\sigma_i S Z + A + \ln(1 + S Z)}{1 + \sigma_i} \quad (5)$$

где $S = Z_0 e^2 / r_d T_i$, $A = \ln[\delta(\sigma_i m_e / m_i)^{1/2}]$, $\delta = n_{i0} / n_{e0}$.

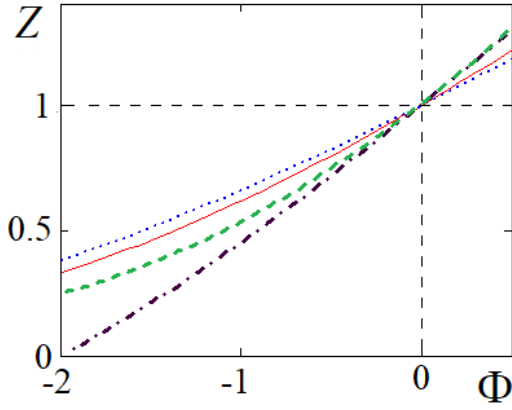


Рисунок 1. Зависимость заряда пылевых частиц от потенциала при $\delta = 1.5$, $m_e/m_i = 1.36 \cdot 10^{-4}$; $\sigma_i = 0.001$, $S = 802$ — зелёная штриховая кривая; $\sigma_i = 0.01$, $S = 140$ — красная сплошная кривая; $\sigma_i = 0.1$, $S = 21$ — синяя пунктирная кривая; $\sigma_i = 1$, $S = 2.72$ — черная штрих-пунктирная кривая.

Сведём систему (3)–(5) к единственному уравнению для N_d . Для этого согласно [8] введём функцию:

$$\Psi(\Phi) = - \int_0^\Phi Z d\Phi \quad (6)$$

Перейдём к единственной переменной $\xi = x - Mt$, где M — число Маха, равное скорости солитона, нормированной на c_d . В соответствии с [7, 8] можно получить:

$$N_d(\Phi, Z) = M / \sqrt{M^2 - 2\Psi(\Phi, Z)} \quad (7)$$

Функция $\Psi(\Phi)$ представима в явном виде, для этого нужно умножить на Z дифференциалы обеих сторон (5), с последующим интегрированием с соответствующими пределами. Согласно [7] получим:

$$\Psi(\Phi, Z) = \frac{\Phi}{S} - (Z - 1) - \frac{\sigma_i S}{2(1 + \sigma_i)} (Z^2 - 1) \quad (8)$$

Уравнения (1), (2), (7) дополним уравнением Пуассона:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} = \mu_e N_e(\Phi) - \mu_i N_i(\Phi) + Z N_d(\Phi, Z) \quad (9)$$

где $\mu_e = n_{e0}/Z_0 n_{d0} = 1/(\delta - 1)$, $\mu_i = n_{i0}/Z_0 n_{d0} = \delta/(\delta - 1)$. Уравнение (9) содержит как периодические (линейные и нелинейные), так солитонные решения.

3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Решением уравнения (9) является зависимость $\Phi(\xi)$. В самом простом случае профиль $\Phi(\xi)$ можно найти численно, решив систему (5), (9) методом Рунге-Кутты. Для того, чтобы перейти от системы уравнений к единственному уравнению, необходимо найти зависимость $Z(\Phi)$. Неявно эта зависимость содержится в (5), получить её в элементарных функциях нам не удалось. График искомой зависимости легко получить, поскольку известна обратная функция $\Phi(Z)$ — см. рисунок 1. Здесь значения S подобраны так, чтобы кривые проходили через точку $\Phi = 0, Z = 1$. Как видно из рисунка

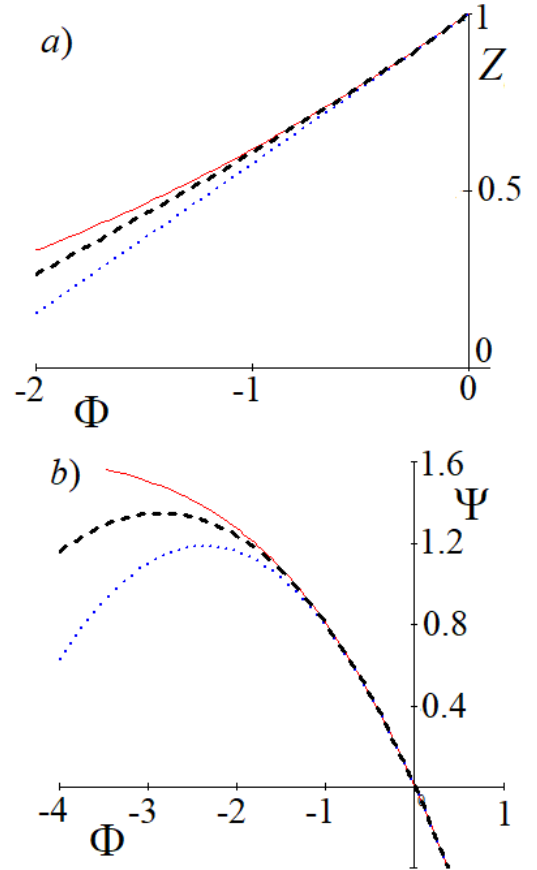


Рисунок 2. Зависимости $Z(\Phi)$ — (а) и $\Psi(\Phi)$ — (б). Точные — красные сплошные кривые; линейное приближение — синие пунктирные кривые; квадратичное приближение — чёрные штриховые кривые.

ка 1 в области $\Phi \in (-1, 0)$ искомая зависимость $Z(\Phi)$ может быть аппроксимирована линейной или квадратичной функцией разложением в ряд Тейлора в окрестности точки $Z = 1$. Для этого необходимо разложить функцию (5) и выразить оттуда Z . Выражения для $Z(\Phi)$ с линейной и квадратичной точностью имеют вид:

$$Z(\Phi) = 1 + \frac{G}{B} (\Phi(\sigma_i + 1) - D) \quad (10)$$

$$Z(\Phi) = 1 + G \left(B - \sqrt{2 \sqrt{\frac{B^2}{2} + D - \Phi(\sigma_i - 1)}} \right) \quad (11)$$

где $B = 1 + \sigma_i(S + 1)$, $D = \sigma_i S + \ln \left(\delta \sqrt{\sigma_i \frac{m_e}{m_i}} (S + 1) \right)$, $G = \frac{S+1}{S}$

Графики зависимости $Z(\Phi)$, полученные в соответствии с (5), (10), (11) представлены на рисунке 2(а). Подставляя (10), (11) в (6) или (8) можно выразить $\Psi(\Phi)$ в элементарных функциях. Соответствующие графики представлены на рисунке 2(б), совместно с графиком $\Psi(\Phi)$, полученным при параметрическом задании этой функции с использованием (5) и (8), где независимой переменной является Z .

Имея выражение $\Psi(\Phi)$ в явных функциях, мы можем свести задачу поиска солитонных решений с самосогласованным зарядом Z к решению единственного

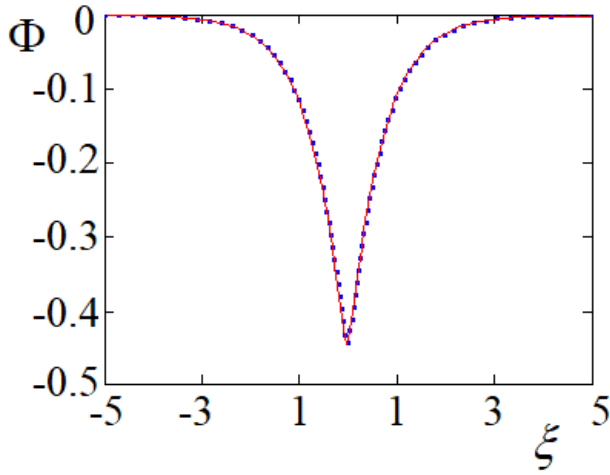


Рисунок 3. Солитонные решения (9) при $\sigma_i = 0.01, \delta = 1.5, m_e/m_i = 1.36 \cdot 10^{-4}, S_d = 139.935, M = 0.9$. С использованием выражения (12) — красная сплошная кривая; с использованием выражения (10) — синяя пунктирная кривая.

уравнения Пуассона (9), солитонные решения которого, в рамках метода Рунге-Кутты, представлены на рисунке 3. Точное выражение для $\Psi(\Phi)$ может быть получено с использованием функции Ламберта. Аналитическое решение уравнения (5) можно записать в виде:

$$Z(\Phi) = \frac{1}{S} \exp(f(\Phi) - W_0[\sigma_i \exp(f(\Phi))]) - \frac{1}{S} \quad (12)$$

где $f(\Phi) = (\sigma_i + 1)\Phi - A + \sigma_i$, W_0 — функция Ламберта (основная ветвь). Функция Ламберта может быть выражена с любой точностью посредством аппроксимации, приведённой в [10]. Далее, используя (12), так же как ранее использовались выражения (10), (11), можно прийти к единственному уравнению Пуассона, численное решение которого приведено на рисунке 3. Как видно из рисунка 3, использование линейного приближения и аналитического выражения с использованием функции Ламберта дают практически совпадающие результаты. Для солитонов меньшей амплитуды согласие будет ещё большим. Тем не менее, на практике проще пользоваться приближенными выражениями, а для ана-

литических расчетов — выражениями с использованием функции Ламберта, производные и интегралы которой хорошо известны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведён анализ МГД модели плазмы, описывающей пыле-акустические солитоны в трёхкомпонентной плазме с учётом самосогласованного заряда пылевых частиц. В рассмотренном случае заряд пыли определялся значениями электронной и ионной концентраций внутри солитона. Задача сведена к решению единственного уравнения Пуассона, которое является нелинейным обычным дифференциальным уравнением второго порядка. Интегрирование выполнено с использованием численного метода Рунге-Кутты четвёртого порядка. Для выражения связи заряда частиц с электрическим потенциалом волны использовались как приближенные выражения, так и точное выражение с использованием основной ветви функции Ламберта. Полученные решения в рамках указанных формулировок хорошо согласуются. На практике проще пользоваться приближенными выражениями, в то время как в аналитических расчетах можно использовать оба подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шуров А Н, Николаев В И, Колотыркин В М, Тузов Л С и Туницкий Н Н 1979 *Журнал физической химии* **53** 930
2. Фортон В Е, Храпак А Г, Храпак С А, Молотков В И и Петров О Ф 2004 *УФН* **174** 495
3. Петров О Ф, Трухачев Ф М, Васильев М М и Герасименко Н В 2018 *ЖЭТФ* **153** 1012
4. Трухачев Ф М и Томов А В 2016 *Космические исследования* **54** 377
5. Трухачев Ф М, Томов А В, Могилевский М М и Чугунин Д В 2018 *Письма в ЖТФ* **44** 87
6. Rao N N and Shukla P K 1990 *Planet Space Sci.* **38** 543
7. Shukla P and Mamun A 2002 *Introduction to Dusty Plasma Physics* (IOP Publishing Ltd.)
8. Ma J X and Liu J 1997 *Phys. Plasmas* **4** 253
9. Barnes M S, Keller J H, Foster J C, O'Neill J A and Coultas D K 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 313
10. Boyd J P 1998 *Appl. Math. Lett.* **11** 27