

Динамика разлета электронов в моноэнергетическом продольно-бесконечном пучке

Д. Э. Янхотов^{1,2}, С. В. Кузнецов¹ и Н. Е. Андреев^{1,2}

¹ Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., 13, стр.2, Москва 125412, Россия

² Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский пер., 9, Долгопрудный 141701, Россия

E-mail: iankhotov.de@phystech.edu

Статья поступила в редакцию 3 июня 2025 г.

Аннотация. В данной статье производится теоретический анализ динамики электронного радиально-симметричного и моноэнергетического пучка. По результатам предложенной аналитической модели находятся радиальные концентрации электронов, определяются параметры, ограничивающие применение рассматриваемой модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Генерация релятивистских электронных пучков с высокой плотностью тока и узкой направленностью стала достижима благодаря применению низкоплотных пен. Данный подход обеспечивает эффективную генерацию релятивистских электронов при взаимодействии интенсивных лазерных импульсов с плазмой, плотность электронов в которой близка к критической величине ($n \approx 10^{21} \text{ см}^{-3}$ для лазерного излучения с длиной волны около 1 мкм).

В настоящем исследовании проводится анализ распространения релятивистского электронного пучка в пустом пространстве — вакууме, а также изучается эволюция его параметров.

Для описания поперечного движения электронов в условиях высокоточковых пучков, характерных для рассматриваемых экспериментов, необходима релятивистская теория. Предложенная теоретическая модель демонстрирует влияние релятивистских эффектов на изменение концентрации электронов в процессе эволюции пучка. В работе рассмотрены различные типы радиальных распределений, а также определены параметры, ограничивающие применимость модели для каждого из них.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим бесконечно длинный цилиндрический пучок электронов в свободном пространстве — вакууме, имеющий концентрацию $n(r)$, зависящую только от расстояния от оси пучка r . Все электроны имеют одинаковую начальную продольную скорость $u = c\sqrt{1 - 1/\gamma^2}$, где c — скорость света, γ — Лоренц-фактор электронов пучка, определяемый их начальной энергией. Изначально в радиальном направлении скорости всех электронов равны нулю.

Перейдем в движущуюся систему координат, связанную с продольным движением: в такой системе полная скорость электронов в начальный момент времени равняется нулю. Из-за бесконечной продольной длины пучка и связанной с этим трансляционной симметрией в движущейся системе координат существует решение с нулевым магнитным полем, и с только радиальным вектором электрического поля $\vec{\mathcal{E}}'$.

Из-за отсутствия каких-либо сил, влияющих на продольное движение электронов, в движущейся систе-

ме координат продольная скорость остается постоянной с течением времени.

Для нахождения силы, действующей на электроны в пучке, применим теорему Гаусса, в которой выберем цилиндрический контур, чья ось совпадает с осью пучка, а радиус равен расстоянию от оси до рассматриваемого электрона:

$$4\pi Q_l l = \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{\mathcal{E}}', \quad (1)$$

где S — замкнутая цилиндрическая поверхность, l — произвольная длина цилиндра в продольном направлении, Q_l — заряд на единицу длины, содержащийся в объеме, ограниченном поверхностью S .

В дальнейшем переменные со знаком штриха взяты в движущейся системе координат, без штриха — в лабораторной. Расстояние от оси пучка до электрона r , а также поперечный импульс p не изменяются при переходе из одной системы в другую и всегда записаны без штриха.

В теоретической модели полагается, что при разлете пучка не происходит радиального пересечения траекторий электронов: если расширение цилиндрического контура связать с поперечным движением электронов, тогда заряды, изначально находившиеся вне контура, не попадут в него при дальнейшем разлете, и, наоборот, находившиеся в контуре заряды не покинут его. При таком предположении величина Q_l постоянна в любой момент времени. Выполнение свойства сохранения погонного заряда подробно рассматривается в разделе 3.

Пусть произвольный электрон пучка изначально находился на расстоянии r_0 от оси, начальный радиус контура тоже равен r_0 . В произвольный момент времени электрон из-за действия силы электрического расталкивания оказывается на радиусе r , такой же радиус имеет связанный с электроном контур. Используя уравнение (1), находим величину электрического поля, действующего на любой электрон:

$$\mathcal{E}'(r \geq r_0) = \frac{2Q_l}{r}. \quad (2)$$

Рассчитаем величину заряда на единицу длины Q_l , зависящую только от начального положения электрона

r_0 и начальной концентрации электронов в движущейся системе $n'(r)$:

$$Q_l = -2\pi e \int_0^{r_0} n'(x) x dx = -\frac{2\pi e}{\gamma} \int_0^{r_0} n(x) x dx. \quad (3)$$

При выводе формул заряд электрона обозначается $-e$. Множитель γ появляется из-за смены системы координат и связанного с этим релятивистского изменения длины и концентрации.

Определим следующие величины:

- $\nu = (2\pi e^2/mc^2) \int_0^\infty n(x) x dx$ — “погонный” электрон или параметр Будкера [1].
- $\eta(r) = \eta_0 = \int_0^{r_0} n(x) x dx / (\int_0^\infty n(x) x dx)$ — параметр, определяющий долю ограниченных контуром электронов.

Эти параметры не изменяются с течением времени. Параметр Будкера одинаков для всех электронов и зависит от начальной концентрации $n(r)$, $\eta(r)$ зависит только от r_0 и $n(r)$.

Подставим в формулу (2) значение Q_l с введенными ранее параметрами:

$$\mathcal{E}'(r \geq r_0) = -\frac{2mc^2 \nu}{e} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{r}. \quad (4)$$

Запишем уравнение динамики электрона:

$$\frac{dp(r \geq r_0)}{dt'} = -e\mathcal{E}'(r) = 2mc^2 \frac{\nu}{\gamma} \eta_0 \frac{1}{r}. \quad (5)$$

Найдем изменение полной энергии E' электрона через работу электрической силы:

$$dE' = \frac{dp}{dt'} dr = 2mc^2 \frac{\nu}{\gamma} \eta_0 \frac{1}{r} dr. \quad (6)$$

После интегрирования данного выражения получаем [2]:

$$E' = mc^2 \left\{ 1 + 2 \frac{\nu}{\gamma} \eta_0 \ln \frac{r}{r_0} \right\}. \quad (7)$$

Из закона сохранения квадрата релятивистской энергии можно получить выражение для скорости радиального движения $\frac{dr}{dt'}$:

$$\frac{dr}{dt'} = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E'^2}}. \quad (8)$$

Подставим выражение, найденное в (7), и решим уравнение (8) относительно dt' :

$$dt' = \frac{dr}{\sqrt{1 - 1/[(2(\nu/\gamma)\eta_0 \ln(r/r_0) + 1)]^2}} \frac{1}{c}. \quad (9)$$

Перейдем в лабораторную систему координат: $z(t) = z_0 + ut$, $u \equiv c\sqrt{1 - 1/\gamma^2}$. Учтем также релятивистское изменение времени: $t = \gamma t'$. Проинтегрировав

выражение (10), получаем траекторию движения электрона $r(t) \equiv r(z(t))$ в неявном виде:

$$z = z_0 + r_0 \sqrt{\gamma^2 - 1} \int_1^{r/r_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - 1/[2(\nu/\gamma)\eta_0 \ln x + 1]}^2}. \quad (10)$$

3. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим однородную начальную концентрацию электронов, не равную нулю до некоторого a — характерного размера пучка, то есть $n(r) = n_0 \theta(a - r)$, где $\theta(x)$ — функция Хэвисайда, равная 0 при $x \leq 0$, иначе 1; n_0 — постоянная величина. Подставим данный профиль в уравнение (4) и получим:

$$\mathcal{E}'(r \geq r_0) = -\frac{2\pi e n_0}{\gamma} \frac{r_0^2}{r}. \quad (11)$$

Если рассматривать поле в начальный момент времени и приравнять $r = r_0$, то можно заметить возрастание абсолютной величины поля по r_0 .

Условие возрастания начального поля от радиуса является достаточным для сохранения величины погонного заряда Q_l . Чтобы это понять, рассмотрим два пронумерованных электрона с начальными радиусами $r_1(t = 0)$ и $r_2(t = 0)$. Пусть для определенности $r_1(t = 0) > r_2(t = 0)$, во время разлета второй электрон оказывается в точках траектории, где в более ранний момент времени был первый электрон, и действующая на него сила меньше, чем действовала тогда ранее на первый электрон ($|\mathcal{E}'_1(r)| > |\mathcal{E}'_2(r)|$ для любого $r \in [r_{01}, \infty)$), а значит всегда выполнено $r_1(t) > r_2(t)$. Таким образом, любой электрон не способен догнать электроны перед собой, и погонный заряд связанного с электроном контура остается постоянным.

Для любого начального распределения $n(r)$ условие возрастания начального поля с начальным радиусом является достаточным для сохранения величины Q_l , и динамика задачи полностью описывается уравнениями (7–10).

Можно привести бесконечное множество видов начальных распределений, для которых не выполнено достаточное условие. Рассмотрим наиболее интересный с физической точки зрения гауссовый начальный профиль $n(r) = n_0 \exp(-\frac{r^2}{a^2})$. Запишем уравнение (4) в начальный момент времени с $r = r_0$:

$$\mathcal{E}'(r = r_0) = -\frac{2\pi e n_0 a^2}{\gamma r_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{r_0^2}{a^2}\right) \right]. \quad (12)$$

Прямой расчет показывает, что при $r_0 \geq 1.2a$, $\mathcal{E}'$ начинает уменьшаться, а, следовательно, пользуясь достаточным условием, мы не можем использовать аналитическую модель. Однако дальнейшее исследование показывает чрезмерную строгость данного утверждения и определяет границы применимости аналитической модели.

Проведем дальнейший анализ с помощью уравнения (10). Ключевым параметром задачи является ν — параметр Будкера, так как релятивистская энергия E' зависит линейно от комбинации $\frac{\nu\eta_0(r_0)}{\gamma}$, где γ и $\eta_0(r_0)$ зафиксированы. При увеличении поперечной энергии возникают релятивистские эффекты, изменяющие динамику разлета.

Продифференцируем формулу (10) по r_0 с фиксированным t :

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{r}{r_0} - \frac{\int_1^{r/r_0} f(x)dx}{f(r/r_0)} - \frac{r_0 \int_1^{r/r_0} \partial f(x, r_0)/\partial r_0 dx}{f(r/r_0)}. \quad (13)$$

Здесь введено обозначение $f(x) = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\sqrt{1 - 1/[2(\nu/\gamma)\eta_0 \ln x + 1]}}$ — подынтегральная функция уравнения (10).

Условие пересечения траекторий электронов, являющихся изначально ближайшими соседями, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = 0. \quad (14)$$

Найдем решение уравнения (14): результатом станет некоторая функция $r_{cross}(r_0)$ — радиус пересечения ближайшего соседа электроном, изначально находившимся на r_0 . Такое решение можно подставить в (10) и найти $t_{cross}(r_{cross}(r_0)) \equiv t_{cross}(r_0)$ — лабораторное время, когда наступило такое пересечение.

Пусть $z_0 = 0$, тогда уравнение (10) разрешается относительно t следующим образом:

$$t_{cross}(r_0) = \frac{r_0}{c} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \int_1^{r_{cross}(r_0)/r_0} r_0 f(x) dx. \quad (15)$$

Чтобы узнать, с какого момента траектории электронов начинают пересекаться, необходимо найти минимум функции $t_{cross}(r_0)$. Находя $\partial t_{cross}(r_0)/\partial r_0 = 0$ и подставляя в полученное выражение уравнение (14) (которое, очевидно, выполнено для t_{cross}), можно связать между собой две частные производные:

$$\frac{\partial t_{cross}}{\partial r_0} = \frac{1}{c} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} f(r_{cross}/r_0) \frac{\partial r_{cross}}{\partial r_0}. \quad (16)$$

Таким образом, самый первый электрон, начавший пересечение траекторий, делает это первым как по радиусу, так и по времени (если $\partial r_{cross}/\partial r_0 = 0$, то и $\partial t_{cross}/\partial r_0 = 0$).

Для наглядной иллюстрации этого факта приведем графики r_{cross} , t_{cross} с разными параметрами ν на рисунках 1 и 2:

Определим радиус и время разлета пучка как произвольный радиус и лабораторное время электрона с таким r_0 , что при нем достигается минимум для r_{cross} и t_{cross} (из рисунков 1 и 2 видно, что в большинстве случаев такой $r_0 \approx 2.0a$).

Определим r_{max} и t_{max} как минимумы соответствующих графиков на рисунках 1 и 2. Смысл приписки max состоит в том, что это максимально возможные радиус и время разлета пучка, до которых можно использовать аналитическую модель — после их достижения проис-

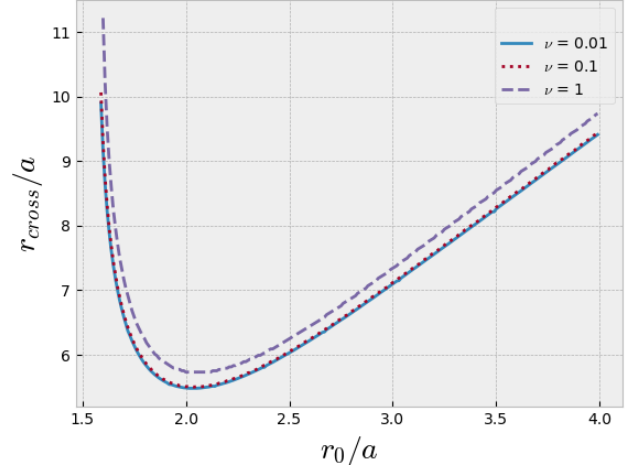


Рисунок 1. Зависимость радиуса пересечения от начального радиуса электрона.

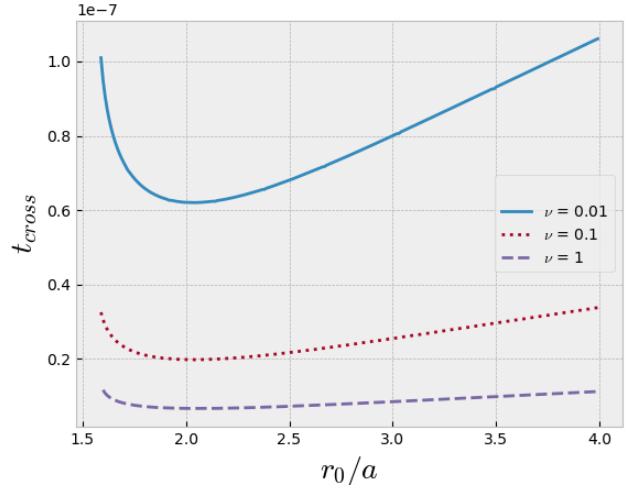


Рисунок 2. Зависимость времени пересечения от начального радиуса электрона.

ходит первое пересечение траекторий, которое изменяет всю последующую динамику разлета. Из рисунка 1 видно, что для нерелятивистского движения с $\nu < 1$ $r_{max} \approx 5.3a$, это и является ограничением применимости аналитической модели на разлет частиц.

Можно заметить, что при приближении начального радиуса r_0 к величине $\approx 1.5a$ решение для r_{cross} и t_{cross} уходит на вертикальную асимптоту. Заключаем, что для “усеченного” гауссового распределения $n(r) = \theta(1.5a - r)n_0 \exp(-\frac{r^2}{a^2})$ не наблюдается радиальных пересечений траекторий из-за невозможности нахождения r_{cross} и t_{cross} . Это и доказывает чрезмерную строгость достаточного условия, при котором мы получали оценку $r_0 \approx 1.1a$.

Приведем график зависимости максимального радиуса разлета r_{max} от параметра Будкера ν :

Как видно из рисунка 3, r_{max} с некоторого момента начинает сильно увеличиваться с ростом ν . Таким образом, высокорелятивистский пучок (в данном случае

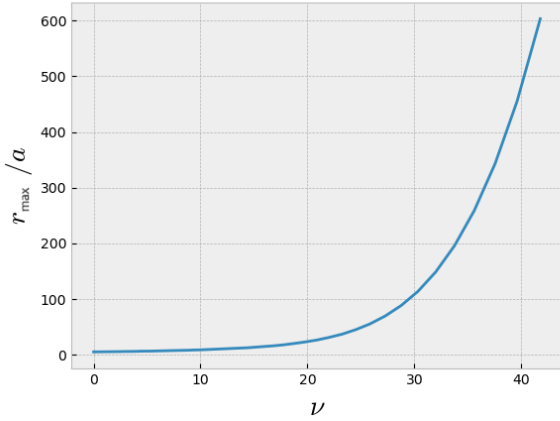


Рисунок 3. Зависимость максимального радиуса разлета от параметра Будкера.

это хорошо заметно на $\nu = 30$) можно рассчитывать с использованием аналитической модели на большой области параметров.

Повышение максимального радиуса разлета связано с релятивистскими эффектами: при сильных начальных полях электроны очень быстро достигают близких к световым скоростей, что не позволяет им пересечься с другими электронами из-за почти одинаковой скорости. Мысленно можно представить предельный случай данного явления: приложив бесконечную силу расталкивания, все электроны изначально приобретут световые скорости и не смогут “догнать” электроны перед собой, ввиду одинаковой для всех скорости. Такое свойство релятивистской механики, как оказывается, сильно влияет на пространственное распределение заряда при эволюции пучка, чему и будет посвящен следующий раздел статьи.

4. КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В РАЗНЫЕ МОМЕНТЫ ЭВОЛЮЦИИ ПУЧКА

Для поиска концентрации в разные моменты динамики пучка решается уравнение на сохранение количества частиц в кольце dr , которое имеет вид:

$$n(r, t) = n(r_0, 0) \frac{dr_0}{dr(t)} \frac{r_0}{r(t)}. \quad (17)$$

Здесь $n(r, t)$ — концентрация на расстоянии r в момент времени t . Стоит отметить, что выражение верно при уже заявленном условии непересечения радиальных траекторий.

В приведенной формуле содержится две величины, требующие нахождения: $\frac{dr}{dr_0}$ и $\frac{r}{r_0}$. Производная $\frac{dr}{dr_0} = \frac{\partial r}{\partial r_0}$ была найдена в разделе 3, чтобы найти отношение $\frac{r_0}{r}$ необходимо численно проинтегрировать (9) с граничным условием $r(t=0) = r_0$.

На рисунке 4 представлены расчеты $n(r, t)$ проведенные для разных ν и двух ранее рассмотренных видов начальных распределений. Для гауссового случая рассматриваются только радиусы разлета $r < r_{max}$, исходя

из найденных ранее границ применимости. Момент времени t соответствует положению электрона с $r_0 = a$, которое можно узнать в легенде к графику.

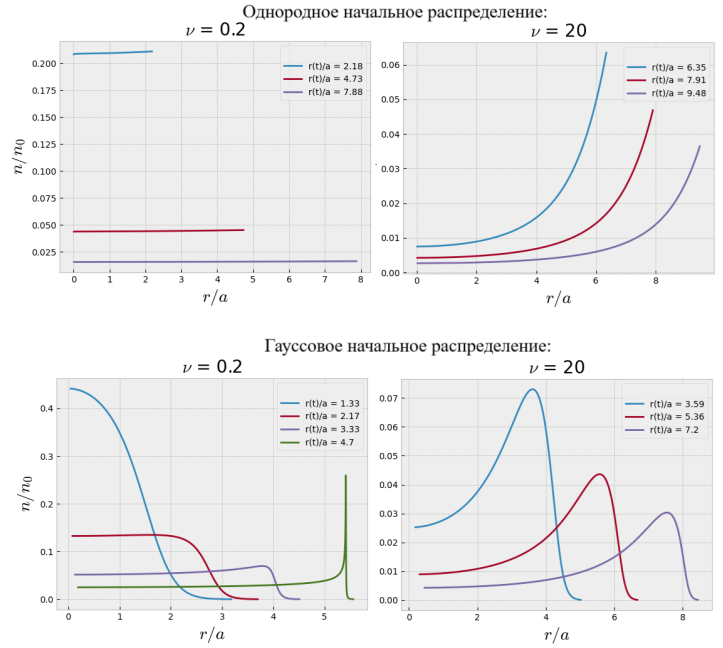


Рисунок 4. Радиальные распределения электронов в разные моменты времени для однородного и гауссового распределений. Концентрация нормирована на n_0 .

Из анализа рисунка 4 можно выявить релятивистское свойство эволюции разлета: при больших ν происходит накопление электронов на границе пучка, вызывающее кольцообразный радиальный профиль разлета электронов. Связано это с релятивистским ограничением на скорость света (подробное объяснение дано в конце раздела 3). В случае маленьких параметров ν однородный пучок остается таким всегда, тогда как гауссов профиль претерпевает значительные изменения, направленные на увеличение концентрации на границе пучка — в данном случае сказывается пересечение траекторий около r_{max} .

Для наглядности кольцевой формы разлета электронов представим поперечное сечение таких пучков на рисунке 5.

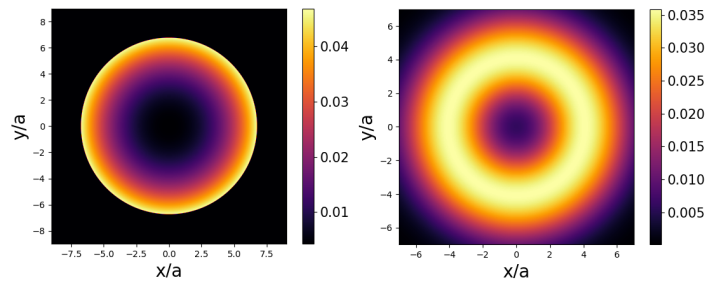


Рисунок 5. Поперечные сечения пучков для $\nu = 20$. Слева однородный, справа гауссовый начальные профили. Концентрация задается цветом и нормирована на n_0 . По осям — нормированные на начальный характерный радиус величины координат электронов в плоскости поперечного сечения XY.

В статье [3] проведено моделирование электронного пучка, из которого можно заметить кольцевую динамику разлета электронов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье проведен теоретический и численный анализ динамики релятивистского электронного пучка. Были выявлены кольцевые профили расхождения электронов и определены параметры, ограничивающие применение теоретической модели. Результаты показывают, что при больших значениях параметра Будкера происходит накопление электронов на границе пучка, что связано с релятивистскими ограничениями на скорость. Дальнейшие исследования могут быть направлены на экспериментальное подтверждение полученных результатов и их применение в технологиях,

связанных с релятивистскими электронными пучками. Дальнейшая работа включает в себя численные методы решения задачи, такие как метод частиц в ячейках (PIC) и исследование немонотонных и/или продольно-конечных пучков.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена за счет средств федерального бюджета (Государственное задание № 075–00269–25–00)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будкер Г И 1956 *Атомная энергия* **1** 9–19
2. Кузнецов С В и Андреев Н Е 2023 *Вестник ОИВТ РАН* **11** 40–42
3. Кочиков И В, Дуэйн Миллер Р Дж и Ищенко А А 2019 *ЖЭТФ* **155** 387–395