

О нейтральной устойчивости ударных волн в двухфазной системе жидкость–пар

А. В. Конюхов, П. Р. Левашов и А. П. Лихачев

Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., 13, стр.2, Москва
125412, Россия

E-mail: konyukhov_av@mail.ru

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2022 г.

Аннотация. Показана связь критерия нейтральной устойчивости ударных волн в двухфазной системе жидкость–пар в условиях фазового равновесия с зависимостью давления насыщенного пара от температуры и с теплоемкостью при постоянном объеме. Типичные зависимости на основе метода соответственных состояний предсказывают выполнение критерия нейтральной устойчивости в двухфазной области для различных веществ. Эти условия реализуемы на участках специфичных для двухфазной области жидкость–пар ударных адиабат, имеющих участки с положительным наклоном в плоскости переменных. На примере широкодиапазонного уравнения состояния магния показано выполнение этого критерия на ударных адиабатах с начальным состоянием в двухфазной области жидкость–пар и проведен расчет эволюции плоского двумерного периодического возмущения ударной волны, показывающий ее устойчивость и слабое затухание вторичных волн. <https://doi.org/10.33849/2023103>

1. ВВЕДЕНИЕ

Условие нейтральной устойчивости ударной волны (УВ) в среде с произвольными термодинамическими свойствами было впервые получено в рамках линейного анализа устойчивости плоской ударной волны относительно двумерных возмущений методом нормальных мод (см. [1]):

$$\frac{1 - M^2(1 + \theta)}{1 - M^2(1 - \theta)} < L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_1 - p_0}{v_0 - v_1} \left(\frac{dv}{dp} \right)_H < 1 + 2M. \quad (1)$$

Индексы 0 и 1 соответствуют начальному и конечному состоянию, p — давление, v — удельный объем, M — число Маха течения за фронтом ударной волны в системе отсчета, в которой ударная волна неподвижна, θ — степень сжатия в ударной волне, производная берется вдоль ударной адиабаты, L — параметр Дьякова. Исследования показали выделенность диапазона (1) при анализе трехволновых конфигураций [2, 3] и при анализе устойчивости ударной волны с использованием других математических методов [4, 5]. Результаты исследования устойчивости с учетом релаксационной структуры ударной волны [6] согласуются с классическим результатом (1). Значительная часть публикаций на тему нейтральной устойчивости ударных волн посвящена вопросу ее реализуемости в реальных средах. Сообщалось о выполнении этого условия в горячей плазме [7], в плазме и двухфазной области фазовой диаграммы металлов [8–10] в реальных газах [11, 12], в двухатомном газе в условиях неравновесной ионизации [13], в не адиабатических условиях при протекании экзотермических реакций [14, 15]. Выполнение условия нейтральной устойчивости в рамках линейного анализа оставляет вопрос о затухании возмущений открытым. Для решения проблемы устойчивости в этом случае требуется нелинейный анализ.

Целью настоящей работы является исследование реализуемости и свойств нейтрально-устойчивых ударных волн в двухфазной системе жидкость–пар в приближении локального термодинамического равновесия. Метод исследования использует подобие термодинами-

ческих свойств различных веществ в области фазового перехода жидкость–газ, которое выражается законом соответственных состояний.

2. НЕЙТРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УДАРНЫХ ВОЛН С КОНЕЧНЫМ СОСТОЯНИЕМ В ДВУХФАЗНОЙ ОБЛАСТИ

Левая часть (1) может быть записана в виде, непосредственно связывающем условие нейтральной устойчивости с производной внутренней энергии по удельному объему при постоянной энтальпии для ударно-сжатого состояния:

$$-\left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_h > p_0. \quad (2)$$

Производная $e_v|_h$ имеет разрыв на границе двухфазной области. Покажем, что она может принимать в этой области отрицательные значения. Неравенство $e_v|_h < 0$ приводится к виду

$$p - p_0 > \frac{c^2/v}{1 + \left(\frac{c^2 - c_t^2}{Te_T|_v} \right)^{1/2}}, \quad (3)$$

где $e_T|_v$ — теплоемкость при постоянном объеме, c и c_t — адиабатическая и изотермическая скорости звука. В двухфазной области $p = p^s(T)$, где p^s — давление насыщенного пара, $c_t = 0$, $c^2 = v^2 T (p_T^s)^2 / e_T|_v$. С учетом этого (3) записывается в виде:

$$p^s - p_0 > \frac{Tp_T^s}{1 + \frac{c_v}{vp_T^s}}, \quad c_v = e_T|_v. \quad (4)$$

Следовательно, в пределе высокой теплоемкости $c_v \gg vp_T^s$ область нейтральной устойчивости ударной волны с начальным давлением p_0 — вся двухфазная область (граница области нейтральной устойчивости внутри двухфазной области в плоскости переменных $p - v$ стремится занять положение прямой $p = p_0$, оставшаяся часть границы совпадает с границей двух-

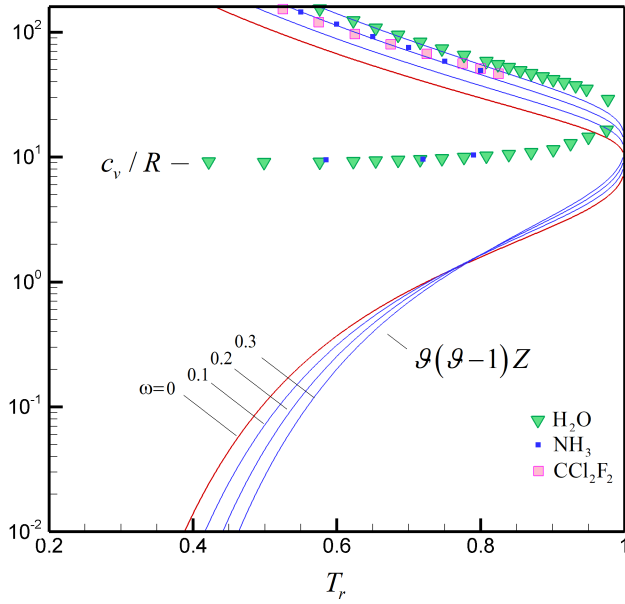


Рисунок 1. Правая часть неравенства (5) на границе двухфазной области, как функция приведенной температуры и коэффициента ацентричности. Показаны значения изохорной теплоемкости воды, аммиака и дихлордифторметана на границе двухфазной области со стороны двухфазных состояний.

фазной области). Необходимое для реализуемости нейтрально-устойчивых ударных волн условие получим, рассматривая предел ударных волн большой интенсивности ($p_0 \rightarrow 0$):

$$\frac{c_v}{R} > \vartheta(\vartheta - 1)Z \quad (5)$$

где $Z = pv/RT$ — коэффициент сжимаемости, $\vartheta = T(\ln p^s)_T$. Величина Z в двухфазной области для фазовых превращений жидкость–пар в критической точке заключена в диапазоне $Z_c \sim 0.2$ – 0.3 и быстро убывает вдоль границы сосуществования фаз со стороны жидкости. Чтобы показать выполнение условия (5) в части двухфазной области жидкость–пар, воспользуемся методом соответственных состояний. Условие (5) можно записать в виде

$$\frac{c_v}{R} > \vartheta(\vartheta - 1) \frac{p_r^s V_r}{T_r} Z_c. \quad (6)$$

На границе двухфазной области все величины, входящие в правую часть неравенства (6) — функции приведенной температуры (T_r) и коэффициента ацентричности (ω). Приведенное давление насыщенного пара и значение параметра ϑ определим, используя метод соответственных состояний Амброуза–Уолтона [16]. Приведенный удельный объем жидкой фазы $V_r(T_r, \omega)$ аппроксимируем, используя корреляцию Ганна и Ямады [17]. Удельный объем насыщенного пара определим из уравнения Клапейрона–Клаузиуса, используя корреляцию для безразмерной теплоты фазового перехода $\delta H/(RT_c) = f(T_r, \omega)$ [16].

В результате, для жидкой фазы на линии насыщения имеем:

$$\vartheta(\vartheta - 1)Z^{(l)} = \vartheta(\vartheta - 1)(0.2920 - 0.0967\omega)(1 - \omega\Gamma) \frac{p_r v_r^0}{T_r},$$

для насыщенного пара

$$\vartheta(\vartheta - 1)Z^{(g)} = (\vartheta - 1)\vartheta(Z^{(l)} + (7.08\tau^{0.354} + 10.95\omega\tau^{0.456})/T_r),$$

где $\tau = 1 - T_r$, $\Gamma = 0.29607 - 0.09045T_r - 0.04842T_r^2$,

$$v_r^0 = 0.33593 - 0.33953T_r + 1.51941T_r^2 - 2.02512T_r^3 + 1.11422T_r^4$$

в диапазоне $0.2 < T_r < 0.8$, и

$$v_r^0 = 1.0 + 1.3\tau^{0.5} \log_{10}(\tau) - 0.50879\tau - 0.91534\tau^2$$

при $0.8 < T_r < 1$. Подстановка p_r и ϑ , рассчитанных на основе метода соответственных состояний Амброуза–Уолтона в полученные выражения для $\vartheta(\vartheta - 1)Z$, приводит к зависимостям, показанным на рисунке 1. Теплоемкость вещества не подчиняется двухпараметрическому закону соответственных состояний, т.к. фазовое превращение не является единственным определяющим фактором, тем не менее, в околоскритической области и со стороны газовой фазы влияние фазового превращения на теплоемкость является доминирующим, о чем говорит подобие кривых распределения теплоемкости со стороны двухфазных состояний на границе двухфазной области.

На рисунке 1 показаны данные для веществ с сильно отличающимися критическими параметрами. Теплоемкость водяного пара ($\omega = 0.34$) хорошо изучена экспериментально, данные для аммиака ($\omega = 0.24$) и дихлордифторметана ($\omega = 0.17$) взяты из работы [18]. Условие нейтральной устойчивости ударной волны (6) выполняется на границе двухфазной области со стороны жидкости и в околоскритической области, как со стороны жидкости, так и со стороны газа. Вместе с тем, если приведенное условие выполнено для насыщенной жидкости и насыщенного пара при некотором значении T , то оно выполнено и для всех двухфазных состояний при этой температуре. Это следует из линейной зависимости как $\vartheta(\vartheta - 1)Z$, так и изохорной теплоемкости,

$$c_v = c_v^{(l)} + (v - v^{(l)})T \frac{d^2 p}{dT^2},$$

от удельного объема парожидкостной смеси. Здесь индекс (l) относится к значениям удельного объема и изохорной теплоемкости жидкости, находящейся в равновесии с паром при температуре T . На выполнение условия нейтральной устойчивости ударной волны в области двухфазных состояний металлов указывалось в [8, 9]. На рисунке 2 показаны линии уровня функции состояния $-e_v|_h$ в плоскости переменных p и v для магния. Там же приведены примеры ударных адиабат (1,2,3), имеющих участки нейтральной устойчивости на пересечении соответствующих областей нейтральной устойчивости с границами (1',2',3'). Таким образом, условие нейтральной устойчивости ударной волны в двухфазной области жидкость–пар выполняется для широкого круга веществ, металлов и неметаллов, веществ с сильно различающимися критическими параметрами. Это связано с особенностями термодинамики парожидкостных

систем, повышенной теплоемкостью, характером зависимости давления насыщенного пара от температуры.

Для реализации нейтрально-устойчивых ударных волн с конечным состоянием в точке фазовой диаграммы, где выполнено (6), необходимо, чтобы это состояние было достижимо ударным сжатием из состояний с малым p_0 , т.к. $|e_v|_h$ — верхняя граница начальных давлений, соответствующих нейтрально устойчивым ударным волнам. Причиной, почему данное условие может не выполняться в двухфазной области, является неустойчивость ударных волн относительно распада при выполнении на ударной адиабате условия $L < -1$, где L — параметр Дьякова. Это имеет место на начальном участке ударных адиабат с исходным состоянием в части двухфазной области жидкость–пар и обусловлено термодинамической аномальностью среды. Результаты прямого анализа выполнения условий $L < -1$ и (1) на ударных адиабатах для Mg, по данным работы [9], показывают, что ограничение на реализуемость ударных волн в виде условия $L > -1$ в двухфазной области является существенным. В то же время, в двухфазной системе жидкость–пар присутствует тип ударных адиабат, имеющих участки с положительным наклоном в переменных $p - V$, которые соответствуют устойчивым относительно распада ударным волнам и для которых выполнены условия нейтральной устойчивости (1). Ударными адиабатами данного типа с малыми значениями приведенного давления и преобладающей долей пара в начальном состоянии достигается окрестность критической точки, включая саму критическую точку. Примеры таких ударных адиабат даны на рисунке 2, где показана ударная кривая, пересекающая бинадаль один раз, и ударные адиабаты, пересекающие двухфазную область два раза. Следует отметить, что тип ударных адиабат, имеющих участки с положительным наклоном в переменных $p - V$ и пересекающих двухфазную область со стороны жидкой фазы не являются специфичными именно для металлов, а обусловлены термодинамикой системы жидкость–пар при типичных зависимостях давления насыщенного пара от температуры. Аналогичные свойства ударных адиабат имеют место для широкодиапазонного уравнения состояния, построенного на основе уравнения состояния Ван-дер-Ваальса.

3. ТЕСТ НА ЗАТУХАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НАЧАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим двумерную задачу для уравнений Эйлера с уравнением состояния магния [9], моделирующую затухание начального периодического по координате, отсчитываемой вдоль фронта, возмущения ударной волны. Течение рассматривается в системе отсчета, в которой невозмущенная ударная волна неподвижна, в декартовой системе координат (x, y) . Начальное возмущение задано искривлением формы ударной волны $x = f(y)$, где $f(y) = \text{sign}(\cos(2\pi y/\Lambda))$ — периодическая ступенчатая функция с периодом Λ , при невозмущенных значениях вектора консервативных переменных по обе стороны от разрыва: $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1$ при $x < f(y)$ и $\mathbf{U} = \mathbf{U}_2$ при $x \geq f(y)$. Значения вектора консервативных переменных $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ связаны соотношениями на стационарной в рассматриваемой системе координат ударной волне

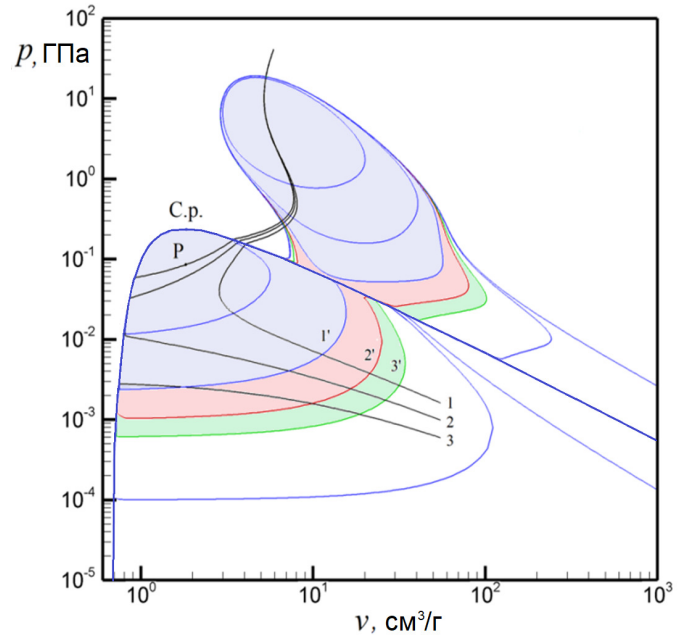


Рисунок 2. Область нейтральной устойчивости на фазовой диаграмме магния, соответствующие различным значениям p_0 и примеры ударных адиабат (1,2,3) имеющих участки нейтральной устойчивости на пересечении соответствующих областей нейтральной устойчивости с границами (1',2',3').

$\mathbf{F}^x(\mathbf{U}_1) = \mathbf{F}^x(\mathbf{U}_2)$, $\mathbf{F}^x = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uH)^T$ — вектор потоков в направлении оси x . Задача ставится в области прямоугольной формы $-l < x < L$, $0 < y < \frac{1}{2}\Lambda$, таким образом, что нижняя ($y = 0$) и верхняя ($y = \frac{1}{2}\Lambda$) границы расчетной области являются осями симметрии. На левой границе $x = -l$ задается начальное значение вектора консервативных переменных $\mathbf{U}_1$, на правой границе $x = L$ ставятся неотражающие граничные условия.

Затухание возмущений (однородность параметров) ударной волны определяется по величине пульсаций давления за ее фронтом. Качественная картина течения, в результате распада двумерного разрыва в рамках рассматриваемой постановки задачи, показана на рисунке 3, где представлены распределения давления (верхний ряд) и плотности (нижний ряд) в последовательные моменты времени. Результатом распада разрыва является формирование вторичных волн, распространяющихся вдоль поверхности ударной волны в виде возмущений ее поверхности, согласованных с семействами акустических и энтропийно-вихревых волн в окрестности фронта. В устойчивой ударной волне с течением времени вторичные волны затухают, ее поверхность становится плоской, а течение за фронтом ударной волны в его окрестности однородным.

4. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для численного расчета используется консервативная конечно-объемная схема, основанная на аппроксимации системы интегральных законов сохранения, которые применительно к ячейкам расчетной сетки полигональной формы при аппроксимации производной по

времени по явной схеме Эйлера записываются в виде

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{F}_{n,k}, \quad (7)$$

где в случае декартовой сетки

$$V_{i,j} = \Delta x \Delta y, \quad \mathbf{n}_{i+1/2,j} = (\Delta y, 0)^T, \quad \mathbf{n}_{i,j+1/2} = (0, \Delta x)^T.$$

$$\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, \quad \Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}.$$

Вектор $\mathbf{F}_{n,k}$, представляющий интеграл по времени потоков консервативных переменных через грань k расчетной ячейки, вычисляется на основе приближенного решения задачи о распаде разрыва $\mathbf{F}_{n,k} = \mathbf{F}_{L/R}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \mathbf{n})$, где $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R$ — реконструированные значения векторов переменных в точке интегрирования на грани k , $\mathbf{n}$ — вектор нормали данной грани, такой, что $|\mathbf{n}|$ — площадь грани. В настоящей работе применяется вращательный вариант схемы Роу [19] совместно с TVD реконструкцией консервативных переменных. Численный вектор потоков метода Роу является точным решением задачи о распаде разрыва для линейной системы уравнений

$$\mathbf{F}_{L/R}^{Roe}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \mathbf{n}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_n(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}_n(\mathbf{U}_R) - |\tilde{A}|(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)),$$

$$|\tilde{A}| = \tilde{\Omega} \text{diag}[\tilde{\lambda}_k] \tilde{\Omega}^{-1} \quad (8)$$

с матрицей, полученной путем специального осреднения $\tilde{A}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = A(\tilde{\mathbf{U}})$, $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$. Здесь $\text{diag}[\tilde{\lambda}_k]$ — обозначение диагональной матрицы, на главной диагонали которой модули собственных значений матрицы $\tilde{A}$. В настоящей работе применялась энтропийная коррекция Хартена [20], которая также обеспечивает непрерывную дифференцируемость вектора потоков. Как и другие способы вычисления потоков на границах ячеек, явно учитывающие в структуре решения задачи о распаде разрыва контактный и тангенциальный разрыв, включая точное решение для нелинейной системы и варианты метода HLLC, метод Роу подвержен многомерной численной неустойчивости при расчете ударных волн большой интенсивности. Энтропийная коррекция Хартена не решает эту проблему полностью. Способ устранения неустойчивости при использовании таких схем представляет собой, так называемый, вращательный метод [21]. Метод основан на представлении вектора нормали к грани расчетной ячейки в виде суммы разнонаправленных составляющих и решении задач о распаде разрыва для соответствующих направлений. Поток вращательного варианта метода Роу записывается в виде

$$\mathbf{F}_{L/R}^{RR}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \mathbf{n}) = \mathbf{F}_{L/R}^{Roe}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \mathbf{n}_1) + \mathbf{F}_{L/R}^{Roe}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \mathbf{n}_2),$$

$$\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}. \quad (9)$$

Выбор направлений может зависеть от решения. Существуют гибридные варианты вращательного мето-

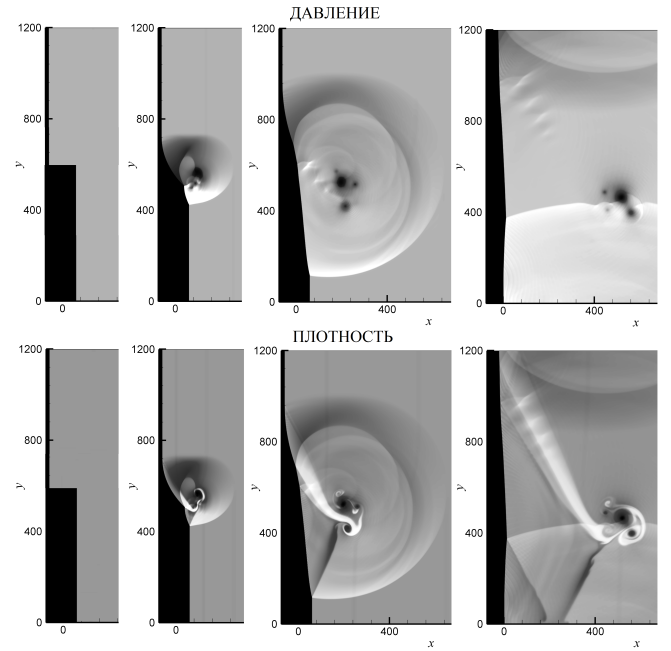


Рисунок 3. Генерация периодического возмущения ударной волны. На нижней и верхней границе ставятся условия симметрии.

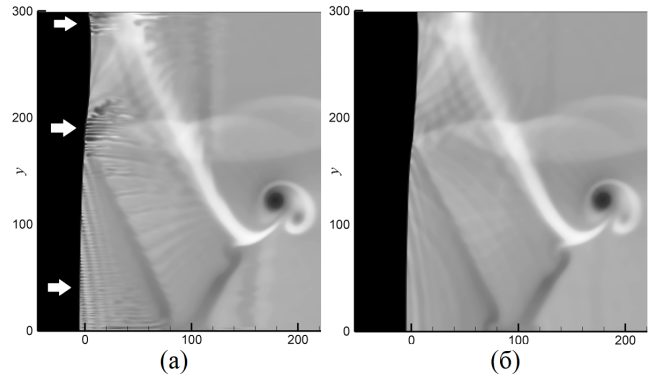


Рисунок 4. Устранение численной неустойчивости типа карбункул схемы TVD на основе метода Роу при расчете гиперзвуковой ударной волны в рамках вращательного подхода с декомпозицией нормали на две составляющих, повернутых относительно нее на угол $\pi/6$.

да, которые сочетают применение способов аппроксимации решения задачи о распаде разрыва, обладающих различными диссипативными свойствами в различных направлениях, в зависимости от решения [22]. Методика с использованием адаптивного угла вращения предложена в [23]. В настоящей работе применялось не зависящее от решения разложение вектора нормали на две составляющие, которые образуют с исходной нормалью некоторый угол α . Формально такой подход соответствует замене плоской грани ребристой поверхностью с углом наклона ребер α и суммированию потоков через плоские участки с различным наклоном. Вращательный метод устраняет карбункул-эффект без введения энтропийной коррекции. На рисунке 4 показано сравнение решений для гиперзвуковой ударной волны, получен-

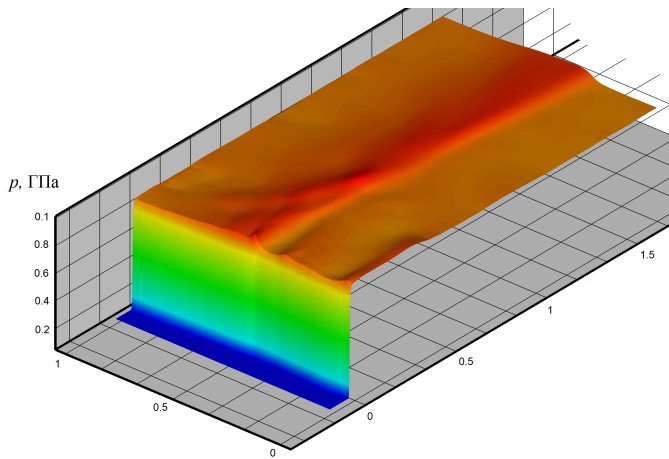


Рисунок 5. Затухание начального плоского периодического возмущения ударной волны (точка Р на рисунке 1) в двухфазной области фазового перехода жидкость–пар в магнии. Поле давления за фронтом УВ после прохождения ударной волной расстояния, равного 100 периодам начального периодического возмущения.

ных на основе метода Roe с TVD-реконструкцией решения в точках интегрирования и вращательного варианта этой схемы с поворотом на угол $\alpha = \pi/6$. Для обеспечения гладкости численного потока использовалось значение параметра энтропийной коррекции $\delta = 0.05$ в единицах спектрального радиуса матрицы $\tilde{A}$. При расчете течений на основе схем типа схемы Годунова, основанных на приближенном решении задачи о распаде разрыва, используется тот или иной метод полиномиальной реконструкции решения в точках интегрирования на границах расчетных ячеек: с использованием TVD-ограничителей, алгоритмов ENO или WENO [24] реконструкции. В настоящей работе расчеты выполнялись для схем TVD с ограничителем minmod [25].

5. ЗАТУХАНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Численный расчет эволюции начального периодического возмущения ударной волны в условиях нейтральной устойчивости с конечным состоянием в двухфазной области жидкость–пар показывает затухание возмущений с течением времени, что говорит о ее нелинейной устойчивости (см. рисунок 5). Особенностью ударных волн с конечным состоянием в области нейтральной устойчивости является сравнительно низкая скорость затухания возмущений. В таблице 1 приведено сравнение скорости затухания ударных волн в средах с различными термодинамическими свойствами: в двухфазной области жидкость–пар, в идеальном газе и в газе твердых сфер. Приведены коэффициенты затухания возмущений ударной волны, определенные в результате приближения результатов расчета зависимостью вида $\langle \delta p \rangle = A \exp(-\beta t)$, где $\langle \delta p \rangle$ — среднеквадратичное отклонение давления в сечении за фронтом ударной волны от невозмущенного значения, а время приведено к безразмерному виду с использованием масштаба $T = 10^2 \Lambda / D$. Здесь Λ — период возмущения ударной волны по поперечной координате, D — скорость ударной

Таблица 1. Коэффициент затухания возмущений на фронте ударных волн.

	Магний	Идеальный газ		Газ твердых сфер
		расчет 1	расчет 2	
$e_v _h$	<0	$=0$	$=0$	>0
M	13.7	8.96	2.86	2.74
p/p_0	133	100	10	10
v_0/v	32.8	3.86	2.93	1.51
β	0.40	2.93	4.25	11.0

волны. Выбор вариантов сравнения обусловлен значением параметра $e_v|_h$, входящего в критерий нейтральной устойчивости ударной волны. Он отрицателен в условиях нейтральной устойчивости, равен нулю для ударных волн в идеальном газе и положителен в газе твердых сфер. Следует отметить, что помимо $e_v|_h$ на скорость затухания возмущений оказывают влияние другие факторы, в частности, чем выше интенсивность ударной волны, тем ниже скорость затухания возмущений. Это иллюстрируется двумя расчетами ударных волн в идеальном газе, отличающихся интенсивностью. При этом для расчета, соответствующего интенсивности ударной волны 10^2 , кривая затухания приблизительно соответствует гиперзвуковому пределу. То есть дальнейшее увеличение интенсивности ударной волны не приводит к заметному снижению скорости затухания возмущений. В случае рассматриваемых ударных волн с конечным состоянием в околокритической области фазового перехода жидкость–пар выполняются условия, способствующие низкой скорости затухания. А именно, в силу особенности ударных адиабат, ударные волны, соответствующие участкам с положительным наклоном в переменных (на рисунке 2) отличаются высоким числом Маха, высокой степенью сжатия и выполнением условия нейтральной устойчивости. Еще одной особенностью реализуемых в двухфазной области ударных волн на участке ударной адиабаты с положительным наклоном в переменных является обратная по сравнению с ударными волнами в однофазной среде картина возмущений, а именно, за участком фронта ударной волны с большей интенсивностью реализуется меньшая плотность (фазовое равновесие смещается в сторону газовой фазы).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показана связь критерия нейтральной устойчивости ударных волн в двухфазной системе жидкость–пар в условиях фазового равновесия с зависимостью давления насыщенного пара от температуры и с теплоемкостью при постоянном объеме. Типичные зависимости на основе метода соответственных состояний предсказывают выполнение критерия нейтральной устойчивости в двухфазной области для широкого круга веществ. Эти условия реализуемы на участках специфичных для двухфазной области жидкость–пар ударных адиабат, имеющих участки с положительным наклоном в плоскости переменных $p-V$. На примере широкодиапазонного уравнения магния показано выполнение этого критерия на ударных адиабатах с начальным состоянием в двухфазной области жидкость–пар и проведен расчет эволю-

ции плоского 2D периодического возмущения ударной волны, показывающий ее устойчивость и слабое затухание вторичных волн.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны К.В. Хищенко за полезное обсуждение и предоставление данных по термодинамическим свойствам магния. Работа выполнена в рамках государственной программы фундаментальных научных исследований (Государственное задание на проведение фундаментальных научных исследований ОИВТ РАН № 075-00460-21-00).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что условие нейтральной устойчивости ударной волны

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p - p_0}{v_0 - v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right) > \frac{1 - M^2(1 + v_0/v)}{1 - M^2(1 - v_0/v)}, \quad (\text{A1})$$

равносильно ограничению на величину производной внутренней энергии по удельному объему при постоянной энтальпии $-e_v|_h > p_0$. Здесь и далее, M — число Маха течения за фронтом ударной волны в системе координат, связанной с ударно-волновым разрывом, индекс 0 соответствует начальному состоянию, величины без индекса, включая термодинамические производные, относятся к состоянию за фронтом ударной волны. Приращения вдоль ударной адиабаты

$$e - e_0 + \frac{1}{2}(p + p_0)(v - v_0) = 0 \quad (\text{A2})$$

связаны соотношением

$$e_v|_p dv + e_p|_v dp + \frac{v - v_0}{2} dp + \frac{p + p_0}{2} dv = 0, \quad (\text{A3})$$

Которое, с учетом выражения для скорости звука и соотношений на ударно-волновом разрыве, приводит к следующему выражению для параметра Дьякова:

$$L = -1 + \frac{1 - M^2}{1 - \frac{p - p_0}{2(p + e_v|_p)}}. \quad (\text{A4})$$

Так как, с другой стороны, A1 равносильно

$$L > -1 + \frac{1 - M^2}{\frac{1}{2} \left(1 - M^2 \frac{v - v_0}{v} \right)}, \quad (\text{A5})$$

условие нейтральной устойчивости ударной волны можно записать в виде

$$\frac{1 - M^2}{1 - \frac{p - p_0}{2(p + e_v|_p)}} > \frac{1 - M^2}{\frac{1}{2} \left(1 - M^2 \frac{v - v_0}{v} \right)}. \quad (\text{A6})$$

$M < 1$, $v_0 > v$, следовательно, обе дроби положительны, и условие принимает вид:

$$M^2 \frac{v_0 - v}{v} > 1 - \frac{p - p_0}{p + e_v|_p}. \quad (\text{A7})$$

С учетом тождеств

$$\frac{c^2}{v^2} = \frac{p + e_v|_p}{e_p|_v}, \quad M^2 = \frac{p - p_0}{v_0 - v} \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{A8})$$

окончательно имеем

$$p - p_0 > \frac{c^2/v}{1 + v/e_p|_v}, \quad (\text{A9})$$

или

$$-e_v|_h > p_0. \quad (\text{A10})$$

Линии уровня функции $e_v|_h$ в плоскости переменных (p, v) ограничивают области состояний, ударно-волновой переход в которые из начальных состояний с давлением меньшим соответствующих уровней отвечает нейтрально устойчивым ударным волнам. Это свойство производной $e_v|_h$ использовано при построении областей нейтральной устойчивости на фазовой диаграмме магния на рисунке 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kontorovich V M 1958 *Soviet Phys. JETP* **6** 1525–1526
2. Fowles G R 1981 *Phys. Fluids* **24** 220–227
3. Kuznetsov N M 1985 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **88** 470–486
4. Erpenbeck J J 1962 *Phys. Fluids* **5** 1181–1187
5. Bates J W 2007 *Phys. Fluids* **19** 094102
6. Kulikovskii A, Il'ichev A, Chugainova A and Shargatov V 2020 *J. Exp. Theor. Phys.* **131** 481–495
7. Wetta N, Pain J C and Heuzé O 2018 *Phys. Rev. E* **98** 033205
8. Lomonosov I V, Fortov V E, Khishchenko K V and Levashov P R 2000 *AIP Conf. Proc.* **505** 85–88
9. Lomonosov I V, Fortov V E, Khishchenko K V and Levashov P R 2004 *AIP Conf. Proc.* **706** 91–94
10. Mond M and Rutkevich I 2001 *Archive of Applied Mechanics* **71** 317–326
11. Bates J W and Montgomery D C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1180–1183
12. Konyukhov A V, Likhachev A P, Fortov V E, Khishchenko K V, Anisimov S I, Oparin A M and Lomonosov I V 2009 *Jetp Lett.* **90** 18–24
13. Mond M and Rutkevich I 2002 *Phys. Fluids* **14** 1468–1475
14. Huete C and Vera M 2019 *J. Fluid Mech.* **879** 54–84
15. Huete C, Cobos-Campos F, Abdikamalov E and Bouquet S 2020 *Phys. Rev. Fluids* **5** 113403
16. Poling B E, Prausnitz J M and O'Connell J P 2001 *Properties of Gases and Liquids. 5th ed.* (New York: McGraw-Hill Education)
17. Gunn R D and Yamada T 1971 *AIChE J.* **17** 1341–1345
18. Вайсман М Д 1967 *Термодинамика парожидкостных потоков* (Ленинград: Энергия. Ленинградское отделение)
19. Roe P 1981 *J. Comput. Phys.* **43** 357–372
20. Harten A 1983 *J. Comput. Phys.* **49** 357–393
21. Ren Y X 2003 *Comput. Fluids* **32** 1379–1403
22. Nishikawa H and Kitamura K 2008 *J. Comput. Phys.* **227** 2560–2581
23. Zhang F, Liu J, Chen B and Zhong W 2016 *Comput. Fluids* **134–135** 11–22
24. Shu C W 1999 *High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics* (Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg) pp 439–582
25. Harten A 1997 *J. Comput. Phys.* **135** 260–278