

Перенос заряженных частиц плазменными солитонами акустического типа на примере ионно-звуковых солитонов: формальный анализ траекторий заряженных частиц

Ф. М. Трухачёв^{1,2}, Н. В. Герасименко², М. М. Васильев¹ и О. Ф. Петров¹

¹ Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., д. 13, стр. 2, Москва, Россия

² Белорусско-Российский университет, проспект Мира, 43, Могилев, Могилевская область 212000, Беларусь

E-mail: ftru@mail.ru

Статья поступила в редакцию 4 апреля 2026 г.

Аннотация. С использованием гидродинамической модели плазмы и метода псевдопотенциала Сагдеева получены приближенные аналитические выражения для описания динамики отдельных ионов при их взаимодействии с ионно-звуковым солитоном. Выполнено сравнение с известными теоретическими результатами, проведено краткое обобщение результатов на случай акустических солитонов различного типа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Консервативным (классическим или динамическим) солитоном называют нелинейную уединенную волну, распространяющуюся в пространстве с постоянными амплитудой, скоростью и формой, устойчивость которой является следствием баланса нелинейных эффектов и дисперсии среды. Явление было впервые описано Скоттом Расселлом, который наблюдал солитон на поверхности водного канала в Глазго в 1834 г. [1, 2].

Математическое описание солитонов появилось позже благодаря работам Дж. Буссинеска (1871 г.) [3] и лорда Рэлея (1876 г.) [4]. Наиболее известной теоретической работой в этой области является статья 1895 г., опубликованная Д. Кортвегом и Г. де Вризом, в которой строго доказана возможность стационарного существования уединенных волн [5]. Полученное ими уравнение (известное как уравнение Кортвега-де Вриза, или КдВ) до настоящего времени является классическим примером интегрируемой системы, допускающей солитонные решения. Было установлено, что солитоны являются уникальными примерами нелинейных волн. В частности, как следует из уравнения КдВ, солитонные решения $u(x) = A \operatorname{sech}^2 x$ остаются нелинейными при любых сколь угодно малых амплитудах, не вырождаясь в линейный волновой пакет при уменьшении амплитуды.

Дальнейшие исследования выявили универсальность феномена уединенных волн [6–13] в различных физических системах. Анализ свойств уединенных волн посвящено огромное количество статей, тем не менее физика нелинейных волн и солитонов в настоящее время далека от завершения. В недавних работах было установлено, что солитоны КдВ-типа переносят частицы вещества в средах, а также что эта способность является фундаментальным их свойством [14–19]. В частности, было показано, что дистанция переноса очень медленно убывает с уменьшением амплитуды солитона. Для солитонов малой амплитуды перенос становится наиболее заметным, экспериментально наблюдаемым эффектом. В опубликованных теоретических работах траектории частиц, возмущенных солитонами, рассчитывались лишь численно, что ограничивает общность результатов. В этой работе такая задача решена аналитически для ионно-звуковых солитонов.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим модель двухкомпонентной бесстолкновительной плазмы, которая содержит горячий электронный фон и холодные однозарядные ионы. В таких условиях тепловая скорость электронов значительно превосходит ионно-звуковую, поэтому ионно-звуковые возмущения можно считать стационарными для электронов. Это позволяет считать электронную популяцию равновесной с достаточно высокой точностью, а распределение концентраций — бoльцмановским.

Воспользуемся одномерной бесстолкновительной гидродинамической моделью [15], содержащей нормированные уравнения движения и непрерывности для ионов, закон распределения Больцмана, а также уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i v_i}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$n_e = \exp(\Phi), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = n_e - n_i, \quad (4)$$

где n_e, n_i — электронная и ионная концентрации, нормированные на невозмущенную концентрацию n_0 ; v_i — ионная скорость, нормированная на ионно-звуковую скорость $C_s = (T_e/m_i)^{1/2}$; T_e — электронная температура; m_i — масса иона; Φ — нормированный электростатический потенциал волны, $\Phi = e\phi/T_e$ (e — элементарный заряд).

Временная координата нормирована на ω_i^{-1} , где $\omega_i = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_i}$ — ионная плазменная частота. Пространственная координата x нормирована на дебаевский радиус $\lambda_D = \sqrt{T_e / (4\pi e^2 n_0)}$. Ограничимся рассмотрением стационарного решения, рассматривая волны, прошедшие все стадии эволюции и движущиеся с постоянной амплитудой, формой и скоростью V , которая после нормировки выражается числом Маха $M = V/C_s$.

С помощью замены переменной $\xi = x - Mt$ перейдем в движущуюся вместе с волной систему

координат. Тогда нормированная концентрация ионов имеет вид [15]

$$n_i(\Phi) = \left(1 - \frac{2\Phi}{M^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Теперь систему уравнений (1)–(4) можно преобразовать к нормированному уравнению Пуассона:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = \exp(\Phi) - \left(1 - \frac{2\Phi}{M^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Однократное интегрирование уравнения (5) с учетом граничного условия $d\Phi/d\xi = 0$ при $\Phi = 0$ позволяет получить зависимость $U(\Phi)$, которая известна как псевдопотенциал Сагдеева [6]:

$$U(\Phi) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2,$$

или

$$U(\Phi) = 1 - \exp(\Phi) - M^2 \left[\left(1 - \frac{2\Phi}{M^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]. \quad (6)$$

Профиль солитона $\Phi(\xi)$ является решением уравнения (6). Его можно найти либо путем численного интегрирования, либо аналитически для случая малых амплитуд, когда справедливо разложение:

$$U(\Phi) = A_2\Phi^2 + A_3\Phi^3 + o(\Phi^3),$$

где $A_2 = \frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2}$; $A_3 = \frac{1}{2M^4} - \frac{1}{6}$. Аналитическое выражение, описывающее профиль ионно-звукового солитона, имеет классический вид [15]:

$$\Phi(\xi) = \Phi_0^* \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{D}\right), \quad (7)$$

где $\Phi_0^* = -A_2/A_3$ — амплитуда солитона;

$D = (-A_2/2)^{-1/2}$ — ширина солитона.

Аналитическое выражение (7) является приближенным и справедливо для описания солитонов с малыми амплитудами $\Phi_0^* < 0.2$ (см. [15]). Для перехода в лабораторную систему координат достаточно выполнить подстановку $\xi = x - Mt$, тогда соответствующий профиль можно записать в виде:

$$\Phi(x, t) = \Phi_0^* \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - Mt}{D}\right). \quad (8)$$

3. РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИЙ ИОНОВ

Как было показано в работе [15] (см. также ссылки внутри), для солитонов малых амплитуд в рамках рассматриваемой модели в лабораторной системе координат профиль скорости $v_i(x, t)$ асимптотически совпадает с профилем потенциала $\Phi(x, t)$. В таком случае траекторию иона можно найти, воспользовавшись переходом от эйлера к лагранжеву описанию движения

по формуле [20]:

$$\frac{dx}{dt} = v_i(x, t) = \Phi_0^* \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - Mt}{D}\right). \quad (9)$$

Уравнение (9) является обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением. Общего аналитического решения у этого уравнения нет, однако если учесть, что солитоны малых амплитуд имеют большую ширину, составляющую десятки или даже сотни дебаевских радиусов, в то время как дистанция ионного переноса не превышает одного, можно получить достаточно достоверную аналитическую зависимость. Достаточно зафиксировать $x = 0$ в правой части (9). В таком виде уравнение становится линейным и легко интегрируется:

$$x(t) = \frac{D\Phi_0^*}{M} \tanh\left(\frac{Mt}{D}\right). \quad (10)$$

Графики полученных с помощью (10) траекторий показаны на рисунке 1. Для сравнения приведены траектории, полученные путем численного интегрирования, согласно [15], которые можно считать эталонной точности. Очевидно, что формы траекторий, полученных разными методами, асимптотически совпадают, а дистанция переноса хорошо согласуется с численным результатом для солитонов малой амплитуды. С ростом амплитуды солитона аналитические и численные результаты начинают расходиться. Как показано в работе [15], выбранный аналитический метод можно использовать при $M < 1.05$.

Полученные траектории описывают все ионы плазмы, взаимодействующие с солитоном. Отличия заключаются лишь в начальном положении иона и времени взаимодействия с уединенной волной. Результаты также легко обобщаются на случаи электронно-акустических и пыле-акустических солитонов, которые можно описать в рамках гидродинамических моделей с помощью метода псевдопотенциала Сагдеева [15, 21].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ гидродинамической модели плазмы, описывающей ионно-звуковые солитоны в двухкомпонентной плазме с горячими электронами и холодными ионами. Задача поиска профиля солитона решена методом псевдопотенциала Сагдеева. Для случая малых амплитуд удалось получить явную аналитическую формулу, описывающую траектории ионов при их взаимодействии с солитоном. Полученные результаты могут найти практическое применение при анализе переноса вещества и легко обобщаются на электронно-акустические и пыле-акустические плазменные моды. Кроме того, представленный подход может быть уточнен при использовании более точного описания солитонного профиля.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление №10 “Экспериментальная лабораторная астрофизика и геофизика”. Этап 2026-2027.

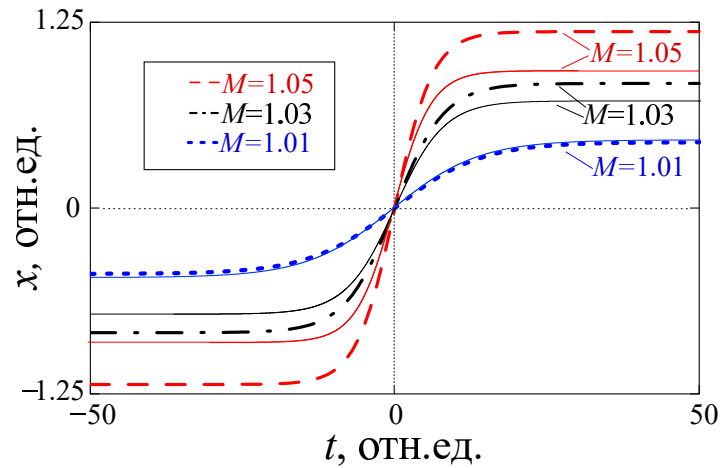


Рисунок 1. Траектории пробного иона в поле солитона при разных значениях параметра M : формула (10) — пунктирная, штриховая и штрихпунктирная кривые; численные решения [15] — тонкие кривые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Russell J S 1838 Report of the committee on waves *Report of the 7th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, Liverpool* vol 417496 pp 417–496
2. Russell J S 1845 *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43* (York, London)
3. Boussinesq J 1871 *CR Acad. Sci. Paris* **72** 755–759
4. Rayleigh L 1876 *Philosophical Magazine. Series 5.* **1**(4) 257–279
5. Korteweg D and De Vries G 1895 *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **39** 422–443
6. Сагдеев Р З 1964 *Вопросы теории плазмы* **4** 20–80
7. Washimi H and Taniuti T 1966 *Physical Review Letters* **17** 996–998
8. Tran M 1979 *Physica Scripta* **20** 317–327
9. Lonngren K, Ikezi H and Scott A 1978 *Solitons in Action* (New York: Academic)
10. Ikezi H, Wojtowicz S, Waltz R, DeGrassie J and Baker D 1988 *Journal of applied physics* **64** 3277–3281
11. Hussain S and Hasnain H 2017 *Physics of Plasmas* **24** 032106
12. Newell A C 1985 *Solitons in mathematics and physics* (SIAM, Philadelphia)
13. Manukure S and Booker T 2021 *Partial Differential Equations in Applied Mathematics* **4** 100140
14. Dubinov A and Lebedeva X 2021 *Chaos, Solitons & Fractals* **152** 111391
15. Trukhachev F M, Gerasimenko N V, Vasiliev M M and Petrov O F 2023 *Physics of Plasmas* **30** 112302
16. Gerasimenko N, Trukhachev F, Vasiliev M and Petrov O 2025 *Physical Review E* **112** 045201
17. Trukhachev F, Gerasimenko N, Vasiliev M and Petrov O 2024 *Nonlinear Phenomena in Complex Systems* **27** 398–403
18. Trukhachev F, Statsenko K, Gerasimenko N, Vasiliev M and Petrov O 2026 *Chaos, Solitons & Fractals* **202** 117583
19. Frolov A A and Chizhonkov E V 2026 *Physics of Plasmas* **33** 032308
20. Falkovich G 2011 *Fluid mechanics: A short course for physicists* (Cambridge University Press, Cambridge)
21. Трухачев Ф М, Васильев М М и Петров О Ф 2020 *Термофизика высоких температур* **58** 563–583