Динамика разлета электронов в моноэнергетическом продольно-бесконечном пучке

Д. Э. Янхотов[1,2], С. В. Кузнецов[1] и Н. Е. Андреев[1,2]

[1] Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., 13, стр.2, Москва 125412, Россия

[2] Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский пер., 9, Долгопрудный 141701, Россия

E-mail: iankhotov.de@phystech.edu

Статья поступила в редакцию 3 июня 2025 г.

Аннотация. В данной статье производится теоретический анализ динамики электронного радиально-симметричного и моноэнергетического пучка. По результатам предложенной аналитической модели находятся радиальные концентрации электронов, определяются параметры, ограничивающие применение рассматриваемой модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Генерация релятивистских электронных пучков с высокой плотностью тока и узкой направленностью стала достижима благодаря применению низкоплотных пен. Данный подход обеспечивает эффективную генерацию релятивистских электронов при взаимодействии интенсивных лазерных импульсов с плазмой, плотность электронов в которой близка к критической величине ($n \approx 10^{21}$ см$^{-3}$ для лазерного излучения с длиной волны около 1 мкм).

В настоящем исследовании проводится анализ распространения релятивистского электронного пучка в пустом пространстве — вакууме, а также изучается эволюция его параметров.

Для описания поперечного движения электронов в условиях высокотоковых пучков, характерных для рассматриваемых экспериментов, необходима релятивистская теория. Предложенная теоретическая модель демонстрирует влияние релятивистских эффектов на изменение концентрации электронов в процессе эволюции пучка. В работе рассмотрены различные типы радиальных распределений, а также определены параметры, ограничивающие применимость модели для каждого из них.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим бесконечно длинный цилиндрический пучок электронов в свободном пространстве — вакууме, имеющий концентрацию $n(r)$, зависящую только от расстояния от оси пучка r. Все электроны имеют одинаковую начальную продольную скорость $u = c\sqrt{1 - 1/\gamma^2}$, где c — скорость света, γ — Лоренц-фактор электронов пучка, определяемый их начальной энергией. Изначально в радиальном направлении скорости всех электронов равны нулю.

Перейдем в движущуюся систему координат, связанную с продольным движением: в такой системе полная скорость электронов в начальный момент времени равняется нулю. Из-за бесконечной продольной длины пучка и связанной с этим трансляционной симметрией в движущейся системе координат существует решение с нулевым магнитным полем, и с только радиальным вектором электрического поля $\vec{\mathcal{E}}'$.

Из-за отсутствия каких-либо сил, влияющих на продольное движение электронов, в движущейся системе координат продольная скорость остается постоянной с течением времени.

Для нахождения силы, действующей на электроны в пучке, применим теорему Гаусса, в которой выберем цилиндрический контур, чья ось совпадает с осью пучка, а радиус равен расстоянию от оси до рассматриваемого электрона:

$$4\pi Q_l l = \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{\mathcal{E}}', \tag{1}$$

где S — замкнутая цилиндрическая поверхность, l — произвольная длина цилиндра в продольном направлении, Q_l — заряд на единицу длины, содержащийся в объеме, ограниченном поверхностью S.

В дальнейшем переменные со знаком штриха взяты в движущейся системе координат, без штриха — в лабораторной. Расстояние от оси пучка до электрона r, а также поперечный импульс p не изменяются при переходе из одной системы в другую и всегда записаны без штриха.

В теоретической модели полагается, что при разлете пучка не происходит радиального пересечения траекторий электронов: если расширение цилиндрического контура связать с поперечным движением электронов, тогда заряды, изначально находившиеся вне контура, не попадут в него при дальнейшем разлете, и, наоборот, находившиеся в контуре заряды не покинут его. При таком предположении величина Q_l постоянна в любой момент времени. Выполнение свойства сохранения погонного заряда подробно рассматривается в разделе 3.

Пусть произвольный электрон пучка изначально находился на расстоянии r_0 от оси, начальный радиус контура тоже равен r_0. В произвольный момент времени электрон из-за действия силы электрического расталкивания оказывается на радиусе r, такой же радиус имеет связанный с электроном контур. Используя уравнение (1), находим величину электрического поля, действующего на любой электрон:

$$\mathcal{E}'(r \geq r_0) = \frac{2Q_l}{r}. \tag{2}$$

Рассчитаем величину заряда на единицу длины Q_l, зависящую только от начального положения электрона

r_0 и начальной концентрации электронов в движущейся системе $n'(r)$:

$$Q_l = -2\pi e \int_0^{r_0} n'(x)xdx = -\frac{2\pi e}{\gamma}\int_0^{r_0} n(x)xdx. \quad (3)$$

При выводе формул заряд электрона обозначается $-e$. Множитель γ появляется из-за смены системы координат и связанного с этим релятивистского изменения длины и концентрации.

Определим следующие величины:

- $\nu = \left(2\pi e^2/mc^2\right)\int_0^\infty n(x)xdx$ — "погонный" электрон или параметр Будкера [1].
- $\eta(r) = \eta_0 = \int_0^{r_0} n(x)xdx/(\int_0^\infty n(x)xdx)$ — параметр, определяющий долю ограниченных контуром электронов.

Эти параметры не изменяются с течением времени. Параметр Будкера одинаков для всех электронов и зависит от начальной концентрации $n(r)$, $\eta(r)$ зависит только от r_0 и $n(r)$.

Подставим в формулу (2) значение Q_l с введенными ранее параметрами:

$$\mathcal{E}'(r \geq r_0) = -\frac{2mc^2}{e}\frac{\nu}{\gamma}\eta_0\frac{1}{r}. \quad (4)$$

Запишем уравнение динамики электрона:

$$\frac{dp(r \geq r_0)}{dt'} = -e\mathcal{E}'(r) = 2mc^2\frac{\nu}{\gamma}\eta_0\frac{1}{r}. \quad (5)$$

Найдем изменение полной энергии E' электрона через работу электрической силы:

$$dE' = \frac{dp}{dt'}dr = 2mc^2\frac{\nu}{\gamma}\eta_0\frac{1}{r}dr. \quad (6)$$

После интегрирования данного выражения получаем [2]:

$$E' = mc^2\left\{1 + 2\frac{\nu}{\gamma}\eta_0\ln\frac{r}{r_0}\right\}. \quad (7)$$

Из закона сохранения квадрата релятивистской энергии можно получить выражение для скорости радиального движения $\frac{dr}{dt'}$:

$$\frac{dr}{dt'} = c\sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{E'^2}}. \quad (8)$$

Подставим выражение, найденное в (7), и решим уравнение (8) относительно dt':

$$dt' = \frac{dr}{\sqrt{1 - 1/\left[(2(\nu/\gamma)\eta_0\ln(r/r_0) + 1)\right]^2}}\frac{1}{c}. \quad (9)$$

Перейдем в лабораторную систему координат: $z(t) = z_0 + ut$, $u \equiv c\sqrt{1 - 1/\gamma^2}$. Учтем также релятивистское изменение времени: $t = \gamma t'$. Проинтегрировав выражение (10), получаем траекторию движения электрона $r(t) \equiv r(z(t))$ в неявном виде:

$$z = z_0 + r_0\sqrt{\gamma^2 - 1}\int_1^{r/r_0}\frac{dx}{\sqrt{1 - 1/\left[2(\nu/\gamma)\eta_0\ln x + 1)\right]^2}}. \quad (10)$$

3. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим однородную начальную концентрацию электронов, не равную нулю до некоторого a — характерного размера пучка, то есть $n(r) = n_0\theta(a - r)$, где $\theta(x)$ — функция Хэвисайда, равная 0 при $x \leq 0$, иначе 1; n_0 — постоянная величина. Подставим данный профиль в уравнение (4) и получим:

$$\mathcal{E}'(r \geq r_0) = -\frac{2\pi e n_0}{\gamma}\frac{r_0^2}{r}. \quad (11)$$

Если рассматривать поле в начальный момент времени и приравнять $r = r_0$, то можно заметить возрастание абсолютной величины поля по r_0.

Условие возрастания начального поля от радиуса является достаточным для сохранения величины погонного заряда Q_l. Чтобы это понять, рассмотрим два пронумерованных электрона с начальными радиусами $r_1(t = 0)$ и $r_2(t = 0)$. Пусть для определенности $r_1(t = 0) > r_2(t = 0)$, во время разлета второй электрон оказывается в точках траектории, где в более ранний момент времени был первый электрон, и действующая на него сила меньше, чем действовала тогда ранее на первый электрон ($|\mathcal{E}'_1(r)| > |\mathcal{E}'_2(r)|$ для любого $r \in [r_{01}, \infty)$), а значит всегда выполнено $r_1(t) > r_2(t)$. Таким образом, любой электрон не способен догнать электроны перед собой, и погонный заряд связанного с электроном контура остается постоянным.

Для любого начального распределения $n(r)$ условие возрастания начального поля с начальным радиусом является достаточным для сохранения величины Q_l, и динамика задачи полностью описывается уравнениями (7–10).

Можно привести бесконечное множество видов начальных распределений, для которых не выполнено достаточное условие. Рассмотрим наиболее интересный с физической точки зрения гауссовый начальный профиль $n(r) = n_0 exp(-\frac{r^2}{a^2})$. Запишем уравнение (4) в начальный момент времени с $r = r_0$:

$$\mathcal{E}'(r = r_0) = -\frac{2\pi e n_0 a^2}{\gamma r_0}\left[1 - exp\left(-\frac{r_0^2}{a^2}\right)\right]. \quad (12)$$

Прямой расчет показывает, что при $r_0 \geq 1.2a$, $\mathcal{E}'$ начинает уменьшаться, а, следовательно, пользуясь достаточным условием, мы не можем использовать аналитическую модель. Однако дальнейшее исследование показывает чрезмерную строгость данного утверждения и определяет границы применимости аналитической модели.

Проведем дальнейший анализ с помощью уравнения (10). Ключевым параметром задачи является ν — параметр Будкера, так как релятивистская энергия E' зависит линейно от комбинации $\frac{\nu\eta_0(r_0)}{\gamma}$, где γ и $\eta_0(r_0)$ зафиксированы. При увеличении поперечной энергии возникают релятивистские эффекты, изменяющие динамику разлета.

Продифференцируем формулу (10) по r_0 с фиксированным t:

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{r}{r_0} - \frac{\int_1^{r/r_0} f(x)dx}{f(r/r_0)} - \frac{r_0 \int_1^{r/r_0} \partial f(x, r_0)/\partial r_0 dx}{f(r/r_0)}. \quad (13)$$

Здесь введено обозначение $f(x) = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\sqrt{1-1/[2(\nu/\gamma)\eta_0 \ln x+1)]^2}}$ — подынтегральная функция уравнения (10).

Условие пересечения траекторий электронов, являющихся изначально ближайшими соседями, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = 0. \quad (14)$$

Найдем решение уравнения (14): результатом станет некоторая функция $r_{cross}(r_0)$ — радиус пересечения ближайшего соседа электроном, изначально находившимся на r_0. Такое решение можно подставить в (10) и найти $t_{cross}(r_{cross}(r_0)) \equiv t_{cross}(r_0)$ — лабораторное время, когда наступило такое пересечение.

Пусть $z_0 = 0$, тогда уравнение (10) разрешается относительно t следующим образом:

$$t_{cross}(r_0) = \frac{r_0}{c} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} \int_1^{r_{cross}(r_0)/r_0} r_0 f(x)dx. \quad (15)$$

Чтобы узнать, с какого момента траектории электронов начинают пересекаться, необходимо найти минимум функции $t_{cross}(r_0)$. Находя $\partial t_{cross}(r_0)/\partial r_0 = 0$ и подставляя в полученное выражение уравнение (14) (которое, очевидно, выполнено для t_{cross}), можно связать между собой две частные производные:

$$\frac{\partial t_{cross}}{\partial r_0} = \frac{1}{c} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} f(r_{cross}/r_0) \frac{\partial r_{cross}}{\partial r_0}. \quad (16)$$

Таким образом, самый первый электрон, начавший пересечение траекторий, делает это первым как по радиусу, так и по времени (если $\partial r_{cross}/\partial r_0 = 0$, то и $\partial t_{cross}/\partial r_0 = 0$).

Для наглядной иллюстрации этого факта приведем графики r_{cross}, t_{cross} с разными параметрами ν на рисунках 1 и 2:

Определим радиус и время разлета пучка как произвольный радиус и лабораторное время электрона с таким r_0, что при нем достигается минимум для r_{cross} и t_{cross} (из рисунков 1 и 2 видно, что в большинстве случаев такой $r_0 \approx 2.0a$).

Определим r_{max} и t_{max} как минимумы соответствующих графиков на рисунках 1 и 2. Смысл приписки max состоит в том, что это максимально возможные радиус и время разлета пучка, до которых можно использовать аналитическую модель — после их достижения происходит первое пересечение траекторий, которое изменяет всю последующую динамику разлета. Из рисунка 1 видно, что для нерелятивистского движения с $\nu < 1$ $r_{max} \approx 5.3a$, это и является ограничением применимости аналитической модели на разлет частиц.

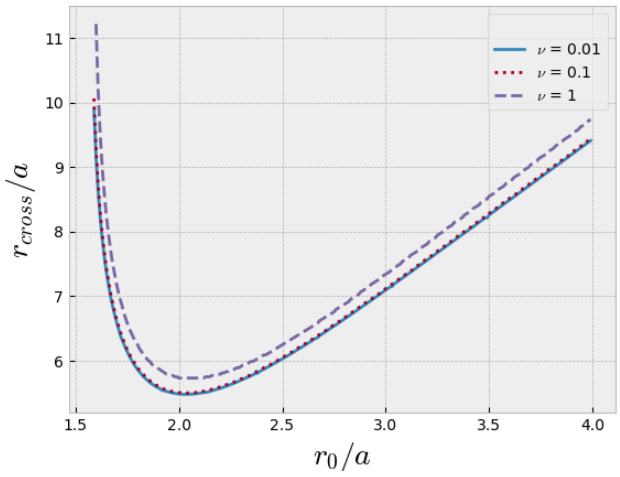

Рисунок 1. Зависимость радиуса пересечения от начального радиуса электрона.

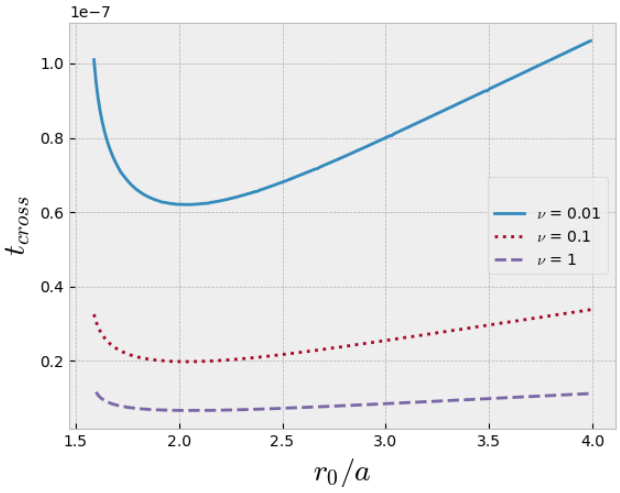

Рисунок 2. Зависимость времени пересечения от начального радиуса электрона.

Можно заметить, что при приближении начального радиуса r_0 к величине $\approx 1.5a$ решение для r_{cross} и t_{cross} уходит на вертикальную асимптоту. Заключаем, что для "усеченного" гауссового распределения $n(r) = \theta(1.5a - r)n_0 exp(-\frac{r^2}{a^2})$ не наблюдается радиальных пересечений траекторий из-за невозможности нахождения r_{cross} и t_{cross}. Это и доказывает чрезмерную строгость достаточного условия, при котором мы получали оценку $r_0 \approx 1.1a$.

Приведем график зависимости максимального радиуса разлета r_{max} от параметра Будкера ν:

Как видно из рисунка 3, r_{max} с некоторого момента начинает сильно увеличиваться с ростом ν. Таким образом, высокорелятивистский пучок (в данном случае

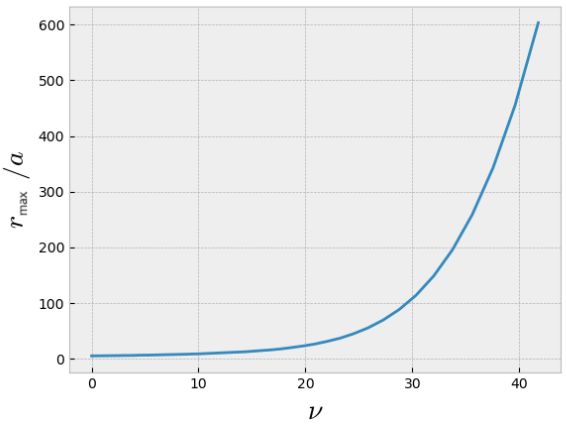

Рисунок 3. Зависимость максимального радиуса разлета от параметра Будкера.

это хорошо заметно на $\nu = 30$) можно рассчитывать с использованием аналитической модели на большой области параметров.

Повышение максимального радиуса разлета связано с релятивистскими эффектами: при сильных начальных полях электроны очень быстро достигают близких к световым скоростей, что не позволяет им пересечься с другими электронами из-за почти одинаковой скорости. Мысленно можно представить предельный случай данного явления: приложив бесконечную силу расталкивания, все электроны изначально приобретут световые скорости и не смогут “догнать” электроны перед собой, ввиду одинаковой для всех скорости. Такое свойство релятивистской механики, как оказывается, сильно влияет на пространственное распределение заряда при эволюции пучка, чему и будет посвящен следующий раздел статьи.

4. КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В РАЗНЫЕ МОМЕНТЫ ЭВОЛЮЦИИ ПУЧКА

Для поиска концентрации в разные моменты динамики пучка решается уравнение на сохранение количества частиц в кольце dr, которое имеет вид:

$$n(r,t) = n(r_0,0)\frac{dr_0}{dr(t)}\frac{r_0}{r(t)}. \qquad (17)$$

Здесь $n(r,t)$ — концентрация на расстоянии r в момент времени t. Стоит отметить, что выражение верно при уже заявленном условии непересечения радиальных траекторий.

В приведенной формуле содержится две величины, требующие нахождения: $\frac{dr}{dr_0}$ и $\frac{r}{r_0}$. Производная $\frac{dr}{dr_0} = \frac{\partial r}{\partial r_0}$ была найдена в разделе 3, чтобы найти отношение $\frac{r_0}{r}$ необходимо численно проинтегрировать (9) с граничным условием $r(t=0) = r_0$.

На рисунке 4 представлены расчеты $n(r,t)$ проведенные для разных ν и двух ранее рассмотренных видов начальных распределений. Для гауссового случая рассматриваются только радиусы разлета $r < r_{max}$, исходя из найденных ранее границ применимости. Момент времени t соответствует положению электрона с $r_0 = a$, которое можно узнать в легенде к графику.

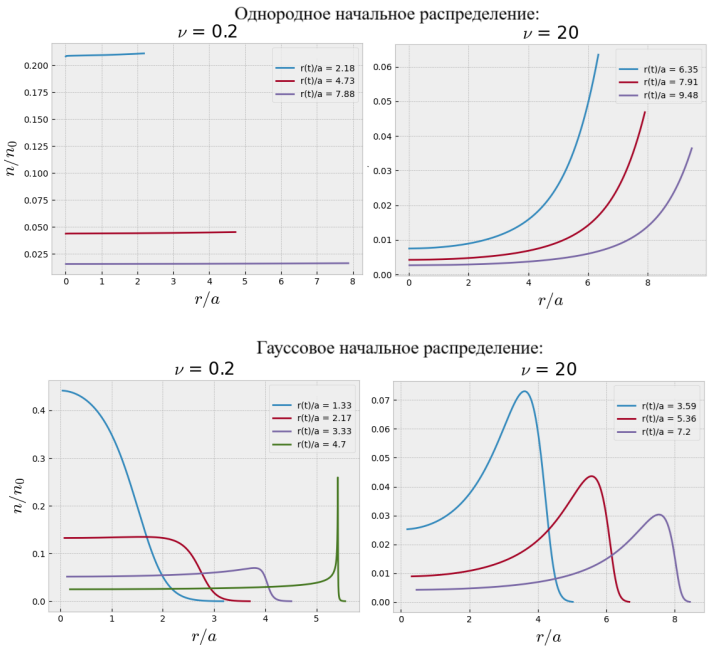

Рисунок 4. Радиальные распределения электронов в разные моменты времении для однородного и гауссового распределений. Концентрация нормирована на n_0.

Из анализа рисунка 4 можно выявить релятивистское свойство эволюции разлета: при больших ν происходит накопление электронов на границе пучка, вызывающее кольцеобразный радиальный профиль разлета электронов. Связано это с релятивистским ограничением на скорость света (подробное объяснение дано в конце раздела 3). В случае маленьких параметров ν однородный пучок остается таким всегда, тогда как гауссов профиль претерпевает значительные изменения, направленные на увеличение концентрации на границе пучка — в данном случае сказывается пересечение траекторий около r_{max}.

Для наглядности кольцевой формы разлета электронов представим поперечное сечение таких пучков на рисунке 5.

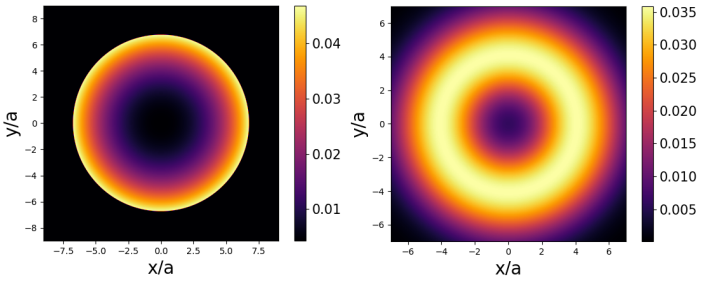

Рисунок 5. Поперечные сечения пучков для $\nu = 20$. Слева однородный, справа гауссовый начальные профили. Концентрация задается цветом и нормирована на n_0. По осям — нормированные на начальный характерный радиус величины координат электронов в плоскости поперечного сечения XY.

В статье [3] проведено моделирование электронного пучка, из которого можно заметить кольцевую динамику разлета электронов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье проведен теоретический и численный анализ динамики релятивистского электронного пучка. Были выявлены кольцевые профили расхождения электронов и определены параметры, ограничивающие применение теоретической модели. Результаты показывают, что при больших значениях параметра Будкера происходит накопление электронов на границе пучка, что связано с релятивистскими ограничениями на скорость. Дальнейшие исследования могут быть направлены на экспериментальное подтверждение полученных результатов и их применение в технологиях, связанных с релятивистскими электронными пучками. Дальнейшая работа включает в себя численные методы решения задачи, такие как метод частиц в ячейках (PIC) и исследование немоноэнергетических и/или продольно-конечных пучков.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена за счет средств федерального бюджета (Государственное задание № 075–00269–25–00)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будкер Г И 1956 *Атомная энергия* **1** 9–19
2. Кузнецов С В и Андреев Н Е 2023 *Вестник ОИВТ РАН* **11** 40–42
3. Кочиков И В, Дуэйн Миллер Р Дж и Ищенко А А 2019 *ЖЭТФ* **155** 387–395