

# Неустойчивость релятивистских ударных волн: численное исследование на основе модельного уравнения состояния

А. В. Конюхов, П. Р. Левашов, А. П. Лихачев и И. Л. Иосилевский  
Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., 13, стр.2, Москва  
125412, Россия

E-mail: konyukhov\_av@mail.ru

Статья поступила в редакцию 15 декабря 2018 г.

**Аннотация.** Рассматривается поведение неустойчивых релятивистских ударных волн на основе специально разработанного модельного уравнения состояния, допускающего адиабаты Тауба-Гюгонно с участками, на которых нарушаются линейные критерии гидродинамической устойчивости релятивистской ударной волны (УВ). Участки неустойчивости УВ перекрываются областями с неоднозначным представлением ударно-волнового разрыва. В условиях неоднозначного представления ударно-волнового разрыва в первом случае наблюдается расщепление УВ с образованием автомодельной комбинированной волны сжатия, во втором случае наблюдаются двумерные нестационарные решения, характеризующимся наличием сильных поперечных волн.  
<https://doi.org/10.33849/2019208>

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Линейная теория устойчивости релятивистской ударной волны была разработана В.М. Конторовичем [1], G. Russo и А.М. Anile [2, 3]. В соответствии с этой теорией ударные волны неустойчивы относительно малых периодических возмущений, если выполнено одно из двух условий:

$$L < -1, \quad (1)$$

$$L > (1 + 2M + v_0 v_1)/(1 - v_0 v_1), \quad (2)$$

где

$$L = \frac{p_1 - p_0}{\tau_0 - \tau_1} \left( \frac{d\tau}{dp} \right)_H$$

— релятивистский аналог параметра Дьякова,  $M$  — число Маха течения за фронтом УВ,  $\tau$  — обобщенный объем,  $v_0$  и  $v_1$  — начальная и конечная скорости среды в системе отсчета, связанной с ударной волной, производная берется вдоль ударной адиабаты Тауба-Гюгонно. Здесь и далее используются безразмерные переменные, которые определяются следующими масштабами: масштаб скорости — скорость света  $c$ , удельной энергии  $c^2$ , давления и плотности энергии  $\rho_m c^2$ , где  $\rho_m$  — характерная плотность, значение которой определяется при построении модельного уравнения состояния.

Ранее нелинейное поведение нерелятивистских ударных волн, неустойчивых с точки зрения линейной теории, рассматривалось в [4, 5] с использованием предложенного в [6] модельного уравнения состояния и его модификации [5]. В соответствии с заключением фундаментальной работы [7] участки ударной адиабаты, которые соответствуют неустойчивым ударным волнам, перекрываются областями с неоднозначным представлением ударно-волнового разрыва. Если такая область перекрывает участок ударной адиабаты с выполнением условия  $L < -1$ , вместо единичной ударной волны реализуется комбинированная волна сжатия, включающая в себя два скачка, распространяющихся в одном направлении, и изоэнтропическую волну сжатия между ними [4]. Если выполнено условие  $L > 1 + 2M$  (не релятивист-

ский аналог условия (2)), ударные волны, принадлежащие области неоднозначного представления ударно-волнового разрыва, приобретают двумерную нестационарную структуру, характеризующуюся наличием сильных поперечных (вторичных) волн [5].

Проявления ударных волновых неустойчивостей представляют интерес в физике горячего ядерного вещества, где появление конкретных волновых конфигураций может служить сигналом прямого или обратного кварк-адронного фазового перехода. Согласно современным представлениям, явления, возникающие после термализации кварк-глюонной плазмы, могут быть описаны в рамках релятивистской гидродинамики (см., например, [8, 9]). Попытки найти упомянутые выше сигналы были сделаны в ряде работ (например, [10] и ссылки, приведенные в этой статье). В основном в литературе рассматривается ударно-волновое сжатие с кварк-адронным фазовым переходом первого порядка. В этом случае адиабаты Тауба-Гюгонно, пересекающие фазовую границу, имеют излом, и вместо одиночной ударной волны реализуется двухволновая комбинированная волна сжатия (см. также [11]).

В то же время из-за существующей неопределенности в моделировании термодинамических свойств горячего ядерного вещества можно предположить непрерывное изменение термодинамических свойств в области фазового перехода, что приводит к формированию гладкого перегиба ударной кривой вместо излома. Если для такой области выполнено неравенство (1), ожидается формирование комбинированной волны сжатия, состоящей из трех элементов (двух ударных волн, движущихся в одном направлении, и разделяющей их изоэнтропической волны сжатия).

Кроме того, даже существующие и используемые уравнения состояния горячей ядерной материи, построенные на основе уравнения состояния адронного газа и модели мешков для кварк-глюонной плазмы, могут дать положительный наклон адиабаты Тауба-Гюгонно в плоскости  $p$ - $\tau$  (при входе ударной адиабаты в область кварк-глюонной плазмы). Это условие необходимо (хотя и недостаточно) для выполнения неравенства (2). Если дальнейшее уточнение уравнения состояния сделает наклон ударной кривой достаточным, это может привести к формированию волновой структуры, аналогичной

описанной выше для нерелятивистского случая [5], что также представляет теоретический интерес.

Основной целью этой работы является распространение нелинейного анализа поведения неустойчивых ударных волн, выполненного в [4, 5] на релятивистский случай. В расчетах используется модификация модельного уравнения состояния [6], позволяющая рассмотреть указанные выше аномалии адиабат.

## 2. МОДЕЛЬНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим основные моменты построения модельного уравнения состояния. Для расчета адиабатических течений достаточно иметь калорическое уравнение состояния. Начнем с уравнения состояния с обычной выпуклой формой изоэнтроп, но с быстрым уменьшением сжимаемости вещества при  $p \approx 1$ ,

$$V = V_0(S) - C\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(p), \quad (3)$$

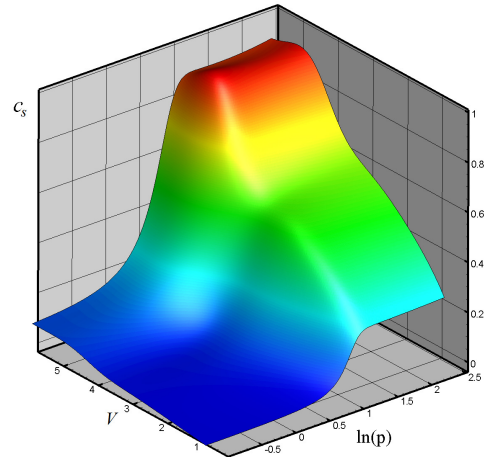
где

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

— функция ошибок,  $C = \text{const}$ ,  $p$  и  $V$  — безразмерные давление и удельный объем, соответственно. Внутренняя энергия, удовлетворяющая условию  $e = 0$  при  $p = 0$ , записывается в виде  $e = C(1 - \exp(-p^2))$ . В соответствии с [6], аномалии ударных адиабат, которые приводят к появлению участков неустойчивости ударных волн, достигаются, если вместо константы  $C$  использовать функцию объема  $C = 4 - \exp(-(V - 4)^2)$ . В этой форме уравнение состояния допускает адиабаты Тауба–Гюгонио с участками, на которых выполняются критерии неустойчивости ударной волны, однако не может быть применено в релятивистском случае из-за нарушения релятивистского принципа причинности. А именно, скорость звука, в соответствии с уравнением состояния растет с увеличением  $p$  как  $\exp(p^2)$  и при сильном сжатии превышает скорость света. Чтобы исправить асимптотику при  $p \rightarrow \infty$ , запишем выражение для внутренней энергии в виде

$$e(V, p) = \xi(1 - \exp(-(p/\xi)^2)) + k(p/\xi)^n V (4 - e^{-(V-4)^2}), \quad (4)$$

где  $k, \xi$  — некоторые константы. В частном случае  $k = 0, \xi = 1$ , это уравнение состояния сводится к модельному уравнению состояния [6]. Введение в уравнение дополнительного члена  $k(p/\xi)^n V$  при надлежащем выборе параметров гарантирует выполнение релятивистского принципа причинности  $c_s < 1$ . Параметр  $n$  определяет поведение скорости звука при высоких давлениях. Скорость звука ограничена, если  $n > 1$ . В расчетах, представленных в настоящей статье, полагается  $n = 2$ . Параметр  $\xi$  масштабирует внутреннюю энергию, что позволяет варьировать Лоренц-фактор ударной волны  $1/(1 - v_0^2)^{1/2}$  и исследовать релятивистские эффекты в рамках специальной постановки задачи. При  $\xi \rightarrow 0$  решения уравнений релятивистской гидродинамики, записанные в переменных  $(\mathbf{v}/\sqrt{\xi}, p/\xi, \rho)$ , стремятся к своему классическому нерелятивистскому пределу,



**Рисунок 1.** Скорость звука в единицах скорости света в зависимости от удельного объема и давления для модельного уравнения состояния.

независящему от параметра  $\xi$  (здесь  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность массы покоя). Зависимость решения, в том числе, формы ударных адиабат, границ неустойчивости ударной волны, структуры комбинированных волн сжатия от этого параметра является проявлением релятивистских эффектов. Зависимость скорости звука от давления и удельного объема, являющегося обратной величиной плотности массы покоя, для  $\xi = k = 0.003$  показана на рисунке 1.

## 3. УРАВНЕНИЯ

Уравнения релятивистской динамики жидкости включают в себя уравнение сохранения энергии–импульса

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \quad (5)$$

где  $\nabla_\beta$  — ковариантная производная в пространстве–времени; тензор энергии импульса задается формулой

$$T^{\alpha\beta} = (e + p)u^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta} p, \quad (6)$$

где  $e$  и  $p$  — плотность энергии и давление, определенные в системе покоя;  $\rho$  — плотность массы покоя; метрический тензор (специальной теории относительности) имеет вид  $g^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  (диагональная матрица, чьи ненулевые элементы перечислены в скобках);  $u^\alpha = (\Gamma, \mathbf{v}\Gamma)^T$  — 4-скорость;  $\mathbf{v}$  — вектор скорости;  $\Gamma = 1/(1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}$  — фактор Лоренца (используются единицы измерения, в которых скорость света равна 1) [12]. Индексы  $\alpha$  и  $\beta$  принимают значения 0, 1, 2, 3. Система замыкается дополнительным законом сохранения

$$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0. \quad (7)$$

## 4. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Система уравнений (5)–(7) в двумерном случае может быть записана в виде гиперболических законов со-

хранения в декартовой системе координат  $(t, x, y)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^1(U)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^2(U)}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{U} = (D, S_1, S_2, \tau_e)^T$  — вектор консервативных переменных, потоки которых имеют вид  $\mathbf{F}^i = (Dv_i, S_1v_i + p\delta_{1i}, S_2v_i + p\delta_{2i}, S_i - Dv_i)^T$ . Консервативные переменные  $D, S_1, S_2$  и  $\tau_e$  связаны с плотностью, компонентами скорости и релятивистской энтальпией  $h = 1 + (e + p)/\rho$  следующими соотношениями

$$D = \rho\Gamma, \quad S_i = \rho h\Gamma^2 v_i, \quad \tau_e = \rho h\Gamma^2 - p - \rho\Gamma. \quad (9)$$

Эти уравнения решаются методом итераций для определения простейших переменных на границах расчетных ячеек. Система уравнений (8) является гиперболической. Собственные значения матрицы Якоби  $\partial \mathbf{F}_n / \partial \mathbf{U}$

вектора  $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}^1 n_x + \mathbf{F}^2 n_y$  имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = v_n, \\ \lambda_3 &= \lambda_m = \frac{v_n(1-c^2) - c\sqrt{(1-v^2)[1-v^2c^2 - v_n^2(1-c^2)]}}{1-v^2c^2}, \\ \lambda_4 &= \lambda_p = \frac{v_n(1-c^2) + c\sqrt{(1-v^2)[1-v^2c^2 - v_n^2(1-c^2)]}}{1-v^2c^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где релятивистская скорость звука определена соотношением

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_s = \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho + \frac{\rho}{p+e} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e. \quad (11)$$

Правые собственные вектора матрицы Якоби записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^1 &= \left( \frac{k}{h\Gamma(k-1)}, \quad v_1, \quad v_2, \quad 1 - \frac{k}{h\Gamma(k-1)} \right)^T, \\ \mathbf{r}^2 &= (v_2\Gamma, \quad 2h\Gamma^2 v_t v_1 - hn_x, \quad 2h\Gamma^2 v_t v_2 + hn_x, \quad -v_t\Gamma + 2hv_t\Gamma^2)^T, \\ \mathbf{r}^3 &= \left( 1, \quad \left( -n_y v_t + n_x \frac{\lambda_m}{a_m} \right) h\Gamma, \quad \left( n_x v_t + n_y \frac{\lambda_m}{a_m} \right) h\Gamma, \quad -1 + \frac{h\Gamma}{a_m} \right)^T, \\ \mathbf{r}^4 &= \left( 1, \quad \left( -n_y v_t + n_x \frac{\lambda_p}{a_p} \right) h\Gamma, \quad \left( n_x v_t + n_y \frac{\lambda_p}{a_p} \right) h\Gamma, \quad -1 + \frac{h\Gamma}{a_p} \right)^T, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $k = h/(h - (\partial e/\partial \rho)_p)$ . Вариации локальных характеристических переменных  $\alpha_i = \mathbf{r}^i \cdot \Delta \mathbf{U}$  определяются на границах расчетных ячеек согласно формулам

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \Gamma(k-1)(h\Delta D + \Gamma(\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S} - \Delta D - \Delta \tau_e)), \\ \alpha_2 &= \frac{v_t}{h(1-v_n^2)} (v_n \Delta S_n - \Delta D - \Delta \tau_e) + \frac{1}{h} \Delta S_t, \\ \alpha_3 &= \frac{a_m}{h\Gamma(\lambda_p - \lambda_m)} [(v_n - \lambda_p)\Lambda - (a_p + v_n b_p)\Delta S_n + \\ &+ (b_p + v_n a_p)(\Delta D + \Delta \tau_e)], \\ \alpha_4 &= -\frac{a_p}{h\Gamma(\lambda_p - \lambda_m)} [(v_n - \lambda_m)\Lambda - (a_m + v_n b_m)\Delta S_n + \\ &+ (b_m + v_n a_m)(\Delta D + \Delta \tau_e)]. \end{aligned} \quad (13)$$

В (12) и (13) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Gamma((k-1)h\Delta D + (k+1)\Gamma(\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S} - \Delta D - \Delta \tau_e)), \\ b_l &= (v_n - \lambda_l)(1 - v_n^2)^{-1}, \\ a_l &= (1 - v_n \lambda_l)(1 - v_n^2)^{-1}, \quad l = m, p. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь,  $v_n, v_t, S_n, S_t$  — нормальные и тангенциальные к грани расчетной ячейки компоненты скорости и импульса;  $\Delta f$  обозначает скачок переменной на границе ячеек. Используя (10)–(13), численные методы для скалярного уравнения переноса могут быть применены к локальным характеристическим переменным. В настоящей работе для вычисления переменных на гранях ячеек применяется существенно неосциллирующая схема (ENO)

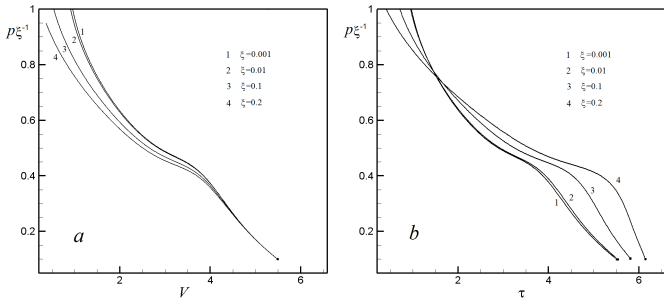
третьего порядка точности [13]. Численный вектор потоков в точках интегрирования, расположенных на гранях ячеек, определяется на основе приближенного метода решения задачи Римана о распаде разрыва HLLC [14]. Для интегрирования по времени используется TVD метод Рунге–Кутты третьего порядка точности [13].

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматривается задача Римана для уравнений релятивистской гидродинамики с начальными данными, соответствующими ударной волне в условиях неоднозначного представления ударно-волнового разрыва. При малых значениях  $\xi$  скорости в задаче о распаде ударно-волнового разрыва малы по сравнению со скоростью света, и решение стремится к нерелятивистскому пределу. Анализ аномального поведения нерелятивистских ударных волн выполнен в работах [4, 5]. В настоящей работе этот анализ распространяется на релятивистский случай.

### 5.1. Случай $L < -1$

Когда внутренняя энергия (в единицах  $c^2$ ) по мере увеличения параметра  $\xi$  становится сравнимой с единицей, релятивистские поправки становятся все более заметными. В частности, они оказывают влияние на выполнение условий неустойчивости ударной волны [3, 15] и на структуру расщепления ударной волны в области неоднозначного представления ударно-волнового



**Рисунок 2.** Модельные ударные адиабаты релятивистской гидродинамики, построенные в переменных  $p$ - $V$  и  $p$ - $\tau$  для различных значений параметра  $\xi$ .

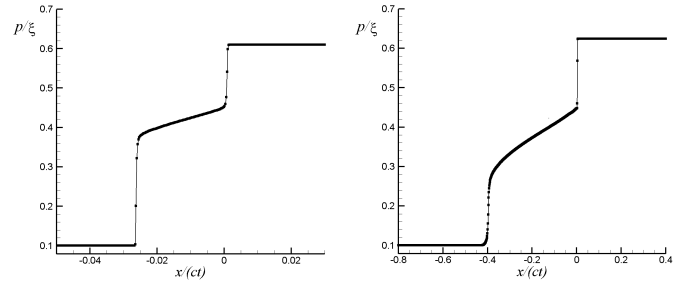
разрыва. Ударные адиабаты Тауба–Гюгонно [16]

$$h_1^2 - h_0^2 + (p_1 - p_0)(\tau_1 + \tau_0) = 0 \quad (15)$$

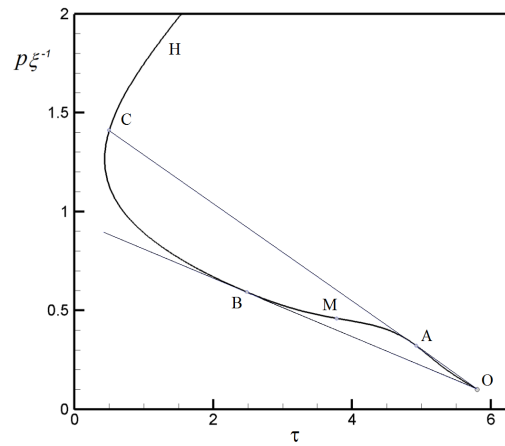
в переменных  $(p/\xi, V)$  и  $(p/\xi, \tau)$ , построенные для начального состояния  $(p_0 = 0.1\xi, V_0 = 0.1821)$  и различных значений параметра  $\xi$ , показаны на рисунке 2. Здесь  $\tau = h/\rho$  обозначает обобщенный объем; индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состоянию. Ударная адиабата 1 близка к классическому пределу. Различия кривых, построенных для разных значений  $\xi$ , вызваны релятивистскими эффектами. Решения задачи Римана, соответствующие конечному давлению  $p_1 = 0.6\xi$  и различным значениям параметра  $\xi$ , показаны на рисунке 3. Решения были получены с использованием уравнения состояния (4) с  $n = 2$ . Пример адиабаты Тауба Гюгонно, соответствующей  $n = 2$  и  $\xi = 0.003$  показан на рисунке 4, где обозначены область неустойчивости ударной волны и область неоднозначного представления ударно-волнового разрыва.

Условие неустойчивости (1) выполнено для ударных волн с конечным состоянием на участке  $AB$  адиабаты Тауба–Гюгонно  $H$ . Этот участок перекрывается областью неоднозначного представления ударно-волнового разрыва  $AC$ . Точки  $A, B$  и  $C$  определяются в результате построения касательных к ударной адиабате линий, проходящих через начальную точку  $O$ . Точки  $A$  и  $B$  являются точками касания, в то время как  $C$  является точкой пересечения ударной адиабаты и касательной к ударной адиабате в точке  $A$ , выпущенной из точки  $O$ . Расчет, показанный на рисунке 3(a) соответствует нерелятивистскому пределу  $\xi \rightarrow 0$ . Рисунки 3(b,c) показывают увеличение амплитуды изоэнтропической волны сжатия и рост разности скоростей лидирующей и замыкающей ударных волн в комбинированной волне сжатия.

На рисунке 5 показано расщепление релятивистских ударных волн при  $\xi = 0.1$  и  $p_1/p_0 = 4.5; 8; 11; 14$ . Нижняя граница неустойчивости  $UB$  определяется касанием линии Релея-Михельсона и ударной адиабаты в плоскости  $p$ - $\tau$  (точка  $A$  на рисунке 3). Участок  $AM$  ударной адиабаты соответствует ударным волнам, которые распадаются на конфигурацию  $\vec{S} \rightarrow \vec{ST}\vec{C}\vec{S}$  (рисунок 5(a)), где  $S$  и  $C$  обозначают ударную волну и изоэнтропическую волну сжатия, соответственно;  $T$  обозначает контактный разрыв, в скобках указаны волны альтернативного семейства. Точка  $M$  на рисунке 3 соот-

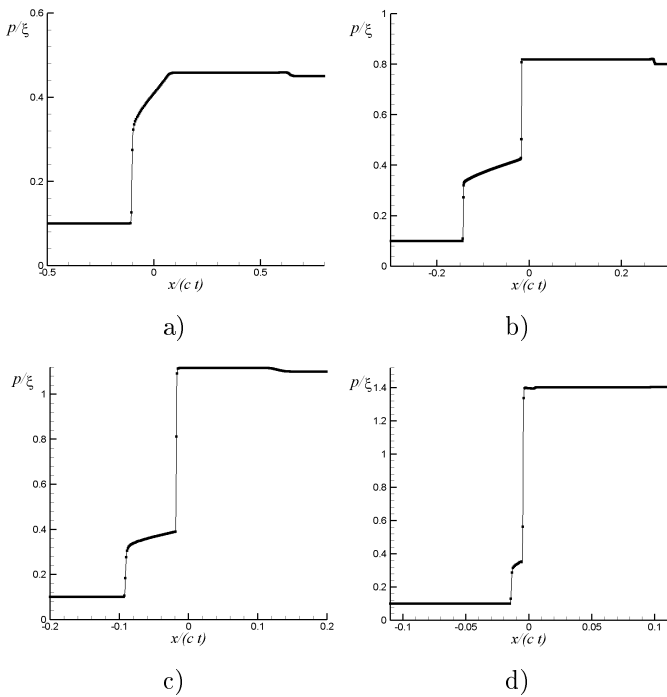


**Рисунок 3.** Расщепление ударной волны в области неоднозначного представления ударно-волнового разрыва при различных значениях параметра  $\xi$ :  $\xi = 0.01$  и  $\xi = 0.2$ . Показано давление  $p/\xi$  как функция безразмерной координаты.



**Рисунок 4.** Ударная адиабата Тауба–Гюгонно в переменных  $p$ - $\tau$ , содержащая область неоднозначного представления ударно-волнового разрыва ( $AC$ ), покрывающую участок, на котором выполняется условие неустойчивости  $UB$   $L < -1$  ( $AB$ ). Точка на ударной адиабате является также точкой перегиба изоэнтропы, в которой выполняется равенство  $(\partial^2 p / \partial \tau^2)_S = 0$ . Наблюдаются следующие схемы распада:  $\vec{S} \rightarrow \vec{ST}\vec{C}\vec{S}$  на участке  $AM$  и  $\vec{S} \rightarrow \vec{ST}\vec{S}\vec{C}\vec{S}$  на участке  $MC$ .

ветствует выполнению условия  $(\partial^2 p / \partial \tau^2)_S = 0$ . Вторая ударная волна в комбинированной волне сжатия возникает при переходе в область  $(\partial^2 p / \partial \tau^2)_S > 0$  выше точки  $M$ . Рисунок 5(b) соответствует расщеплению ударной волны с образованием двух ударных волн и изоэнтропической волны сжатия между ними  $\vec{S} \rightarrow \vec{ST}\vec{S}\vec{C}\vec{S}$ . По мере того, как давление за фронтом исходной  $UB$  приближается к точке  $C$ , разность скоростей первой и второй ударных волн в структуре комбинированной волны сжатия, а также амплитуда изоэнтропической волны сжатия, стремятся к 0 (см. рисунок 5(c,d)). Выше точки  $C$ , ударные волны устойчивы относительно распада. В классическом пределе точки, соответствующие  $p_1/p_0 = 11; 14$ , расположены вне области неоднозначного представления ударно-волнового разрыва и расщепление  $UB$  не происходит. Релятивистский эффект проявляется в сдвиге верхней границы области неоднозначного представления ударно-волнового разрыва в область



**Рисунок 5.** Расщепление ударной волны в условиях неоднозначного представления ударно-волнового разрыва при различной интенсивности исходной УВ  $p_1/p_0$ : 4.5(a), 8(b), 11(c), 14(d).

высоких давлений в результате трансформации формы ударной адиабаты в переменных  $p-\tau$ .

5.2. Случай  $L > (1 + 2M + v_0v_1)/(1 - v_0v_1)$

Рассмотрим случай, когда на отрезке адиабаты Тауба-Гюгонно выполняется условие (2). Пример такой адиабаты (H), показанный на рисунке 6(a) в переменных  $p-u$ , соответствует следующим значениям параметров:  $n = 2$  и  $\xi = k = 0.003$ ; начальное состояние  $p_0 = 0.1821$  и  $p_0 = 0.1\xi$ .

Условие неустойчивости выполняется для ударных волн с конечным состоянием, соответствующим отрезку EF на рисунке 6(a). Конечными точками этого отрезка являются точки касания в плоскости  $p-u$  ударной адиабаты и изоэнтроп, соответствующих семейству волн, распространяющихся в противоположном направлении. В этих точках выполняется условие касания:

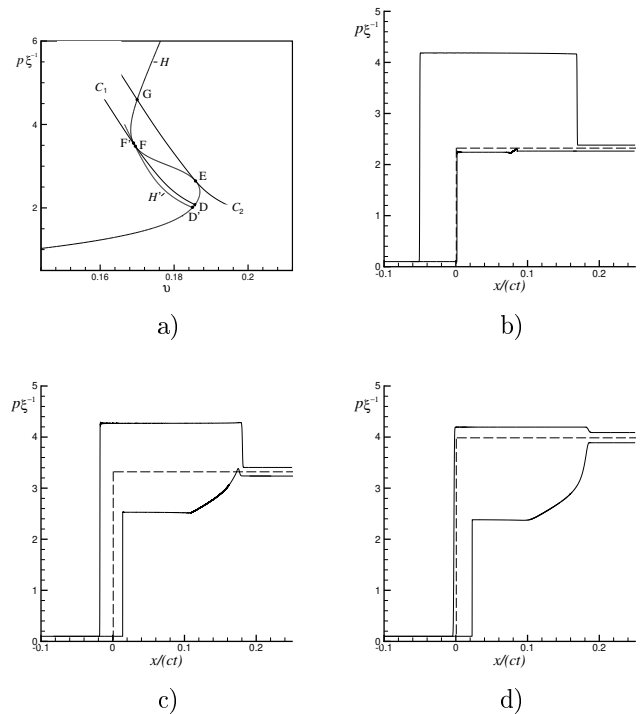
$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{C^-} = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_H, \quad (16)$$

Здесь производная в правой части равенства берется вдоль ударной адиабаты Тауба-Гюгонно, а производная в левой части равенства вдоль изоэнтропы семейства

$$C^- : \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{C^-} = -\Gamma' \rho c_s h, \quad (17)$$

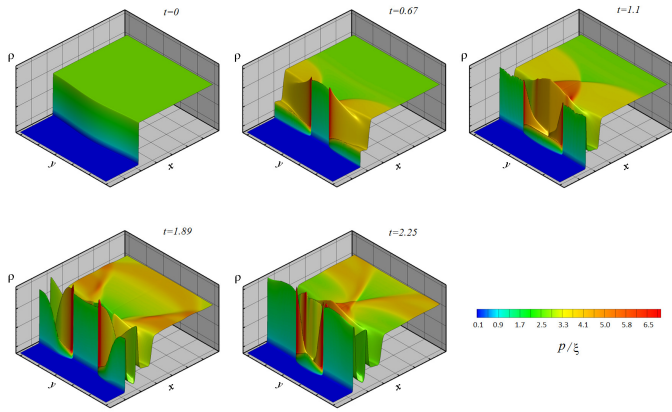
где значения переменных соответствуют состоянию за фронтом ударной волны, а фактор Лоренца определен в системе покоя среды перед фронтом ударной волны (см. [3]).

На основе построений в плоскости  $p-u$  можно видеть, что участок неустойчивости EF (рису-

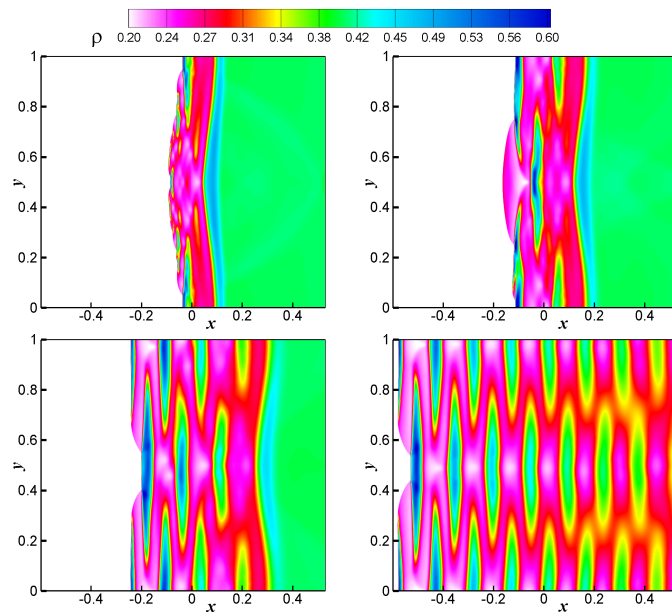


**Рисунок 6.** Ударная адиабата Тауба-Гюгонно с участком, на котором выполнено условие неустойчивости УВ (2) показана в переменных  $p - u$ . Для различных участков области неоднозначного представления ударно-волнового разрыва ( $EF$ ,  $D'E$  и  $FG$ ) показана реакция ударной волны на низкоамплитудные возмущения в виде волн сжатия и разрежения. В зависимости от участка наблюдаются следующие конфигурации расщепления возмущенной УВ:  $\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{ST}\vec{S}$  на  $D'E$ ,  $\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{RT}\vec{S}$  или  $\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{ST}\vec{S}$  на  $EF$ ,  $\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{RT}\vec{S}$  на  $FG$ .

нок 6(a)) принадлежит сегменту  $D'G$ , на котором ударно-волновой разрыв представляется в виде конфигураций расходящихся волн, соединяющих начальное и конечное состояния исходной ударной волны. В пределах области с неоднозначным представлением ударно-волнового разрыва ( $D'G$ ) можно выделить три участка  $D'E$ ,  $EF$  и  $FG$ , на которых возможны следующие конфигурации распада:  $\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{ST}\vec{S}$  на  $D'E$ ,  $\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{RT}\vec{S}$  или  $\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{ST}\vec{S}$  на  $EF$ ,  $\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{RT}\vec{S}$  на  $FG$ . Здесь  $S$  и  $R$  обозначают ударную волну и волну разрежения, соответственно;  $T$  обозначает контактный разрыв; элементы, отмеченные стрелкой ( $\overleftarrow{\phantom{x}}$ ), соответствуют альтернативному (для исходной УВ) семейству волн. Заметим, что в отличие от случая  $L < -1$ , распад оставляет лидирующую ударную волну в условиях неоднозначного представления ударно-волнового разрыва. Например, расщепление ударной волны с конечным состоянием на  $FG$  ( $\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{RT}\vec{S}$ ) приводит к образованию конфигурации распада с лидирующей ударной волной на отрезке  $D'E$ , где, в свою очередь, возможно «обратное» расщепление ( $\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{ST}\vec{S}$ ) с лидирующей ударной волной, соответствующей точке на участке  $FG$  ударной адиабаты. Это свойство приводит к сложному поведению ударных волн, которое характерно для ударной адиабаты с выполнением условия  $L > (1 + 2M + v_0v_1)/(1 - v_0v_1)$ , т.е. является маркером данной неустойчивости. Одномер-

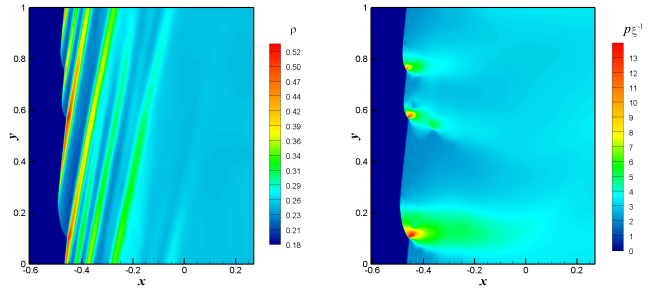


**Рисунок 7.** Формирование нестационарного режима, сопровождающегося наличием незатухающих поперечных волн, при гармоническом возмущении формы фронта ударно-волнового разрыва с параметрами, соответствующими области его неоднозначного представления.



**Рисунок 8.** Нелинейное взаимодействие вторичных волн: сильные волны поглощают слабые.

ные расчеты ударных волн с конечным состоянием в области неоднозначного представления ударно-волнового разрыва  $D'G$  показывают, что поведение ударной волны (независимо от того, распадается она или нет) зависит от малых возмущений. Если ударная волна, соответствующая участку  $FG$ , взаимодействует с волной сжатия малой амплитуды или ударная волна, соответствующая сегменту  $D'E$ , взаимодействует с волной разрежения малой амплитуды, проходящей на  $UB$  со стороны сжатого вещества, эти взаимодействия приводят к малому изменению параметров ударной волны. То есть ударная волна реагирует на возмущение как устойчивая. С другой стороны, возмущения противоположного знака инициируют расщепление ударной волны с конфигурациями распада ( $\vec{S} \rightarrow \vec{RTS}$ ) и ( $\vec{S} \rightarrow \vec{STS}$ ), соответственно. Ударные волны, соответствующие участку неустойчивости  $EF$ , во всех случаях расщепляются



**Рисунок 9.** Распределения плотности (а) и давления (б), вызванные вторичными волнами в результате локального возмущения метастабильной  $UB$ , соответствующей участку  $DF$  адиабаты Тауба–Гююнио.

необратимо; ударные волны с конечным состоянием на участке  $EF$  также не являются элементами распадных конфигураций. Реализуемая конфигурация распада зависит от возмущения, как показано на рисунке 6(b-d), где представлены результаты моделирования возмущенной ударной волны. На рисунках показана зависимость давления от координаты, штриховая линия соответствует исходной ударной волне.

Поведение ударной волны в области ее неоднозначного представления, содержащей участок адиабаты Тауба–Гююнио с выполненным условием неустойчивости  $UB$   $L > (1 + 2M + v_0v_1)/(1 - v_0v_1)$ , исследовалось ранее в рамках двумерной постановки. В работе [5] показано, что в этом случае наличие периодического двумерного возмущения плоской ударной волны приводит к нестационарному режиму, напоминающему ячеистую детонацию. Начальная стадия эволюции поля давления в таком течении показано на рисунке 7.

На участках вогнутости фронта  $UB$  (относительно направления распространения ударной волны) под влиянием проходящих от соседних участков фронта возмущений инициируется распад ударной волны на конфигурацию  $\vec{STS}$ . На выпуклых участках фронта, находящихся под влиянием проходящих волн разрежения, на начальной стадии распад  $UB$  не наблюдается. В результате образуются поперечные волны, распространяющиеся вдоль фронта  $UB$  со стороны ударного сжатого вещества и формируется предельный нестационарный режим течения, в котором амплитуда колебаний давления за фронтом  $UB$  соответствует протяженности области неоднозначного представления ударно-волнового разрыва.

В том случае, если начальное возмущение включает в себя составляющие с различной длиной волны, то с течением времени остаются только длинноволновые возмущения. Это явление показано на рисунке 8, где представлена эволюция ударной волны, возмущенной несколькими гармониками. Такое поведение можно объяснить нелинейным взаимодействием поперечных волн: сильные вторичные волны поглощают слабые. Следует отметить, что в отличие от неустойчивой ударной волны (для которой выполняется условие  $L > (1 + 2M + v_0v_1)/(1 - v_0v_1)$ ) ударные волны, соответствующие участкам  $D'E$  и  $FG$  области неоднозначности (рисунок 6), могут распространяться в метастабильном режиме. В этом случае локальное сильное возмущение

соответствующего знака приводит к образованию вторичных (поперечных) волн, распространяющихся вдоль фронта ударной волны, переводя ее в нестационарный режим, как показано на рисунке 9.

Рассмотрим плоскую ударную волну с конечным состоянием, относящимся к отрезку  $D'E$  адиабаты Тауба–Гюгонио (рисунок 5). Эта ударная волна ведет себя как стабильная, взаимодействуя с приходящей слабой волной разрежения (см. одномерные решения, соответствующие участку  $D'E$  на рисунке 5). Метастабильное поведение обусловлено отсутствием критических возмущений. Фактически, прохождение вихря или энтропийного возмущения через фронт ударной волны инициирует расщепление первичной ударной волны, которое сопровождается образованием вторичных волн, распространяющихся вдоль поверхности первичной ударной волны (см. рисунок 9).

В отличие от вторичных волн в случае стабильных или нейтрально устойчивых (в линейном приближении) ударных волн эти вторичные волны распространяются без видимого затухания. Колебания давления за фронтом УВ в этих волнах приблизительно соответствуют протяженности области неоднозначного представления ударно-волнового разрыва ( $D'G$  на рисунке 6(a)).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нелинейный анализ нерелятивистских ударных волн, неустойчивых в соответствии с критериями теории линейной устойчивости, распространен на случай релятивистских ударных волн. Предложено модельное уравнение состояния, совместимое с релятивистской теорией (не приводит к сверхсветовым значениям ско-

рости звука) и отвечающее требованию термодинамической стабильности. Адиабаты Тауба–Гюгонио, построенные на основе модельного уравнения состояния, содержат участки неоднозначного представления ударно-волнового разрыва, перекрывающие области неустойчивости ударной волны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kontorovich V M 1958 *JETP* **34** 186–94
2. Anile A M and Russo G 1986 *Phys. Fluids* **29** 2847–52
3. Anile A M and Russo G 1987 *Phys. Fluids* **30** 1045–51
4. Konyukhov A V, Likhachev A P, Oparin A M, Anisimov S I and Fortov V E 2004 *JETP* **98** 811–9
5. Konyukhov A V, Likhachev A P, Fortov V E, Anisimov S I and Oparin A M 2009 *JETP* **90** 25–31
6. Ni A L, Sugak S G and Fortov V E 1986 *High Temp.* **24** 435–40
7. Kuznetsov N M 1989 *Phys. Usp.* **32** 993–1012
8. Фортв В Е 2009 *Усп. физ. наук* **179** 653–687
9. Shuryak E 2009 *Progress in Particle and Nuclear Physics* **62** 48–101
10. Bugaev K A, Ivanytskyi A I, Oliinychenko D R, Sagun V V, Mishustin I N, Rischke D H, Satarov L M and Zinovjev G M 2016 *Eur. Phys. J. A* **52** 175–188
11. Konyukhov A V, Likhachev A P and Fortov V E 2015 *High Temp.* **53** 622–626
12. Landau L D and Lifshitz E M 1987 *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon)
13. Shu C W and Osher S 1989 *J. of Comput. Phys.* **83** 32–78
14. Mignone A and Bodo G 2005 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **364** 126–36
15. Russo G and Anile A M 1987 *Phys. Fluids* **30** 2406–2413
16. Taub A H 1987 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30** 1