

Колебания диссипативной системы двух невязанно связанных осцилляторов при воздействии случайных сил

Э. А. Саметов^{1,2}, Е. А. Лисин^{1,2} и О. С. Ваулина^{1,2}

¹ Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., 13, стр.2, Москва 125412, Россия

² Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский пер., 9, Долгопрудный 141701, Россия

E-mail: sametov@phystech.edu

Статья поступила в редакцию 18 мая 2019 г.

Аннотация. В работе рассматриваются колебания диссипативной системы из двух взаимодействующих частиц во внешнем силовом поле при воздействии случайных сил. Приводится аналитическое выражение для спектральной плотности случайных процессов в рассматриваемой системе с учетом нарушения симметрии межчастичного взаимодействия. <https://doi.org/10.33849/2019106>

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появилось немало работ, посвященных, так называемому, "нарушению" симметрии взаимодействия [1–9]. Такое формальное невыполнение третьего закона Ньютона, может возникнуть, например, когда рассматривается подсистема частиц в среде, при этом сама среда учитывается опосредованно — через потенциал межчастичного взаимодействия, диссипативные силы, а также как источник кинетической энергии частиц. Ярким примером таких систем являются некоторые виды коллоидов [2–4, 10–13] и пылевой плазмы [1, 5, 8, 14–16]. Их изучение, помимо фундаментальных аспектов, представляет особый интерес для нано- и микро-технологических применений [10, 17–19]. Невзаимность сил межчастичного взаимодействия может возникать за счет внешних сил, вызывающих потоки среды, окружающей частицы. Так, например, в пылевой плазме сильное электрическое поле вблизи электрода приводит к дрейфу ионов [20]. Когда частицы микронных размеров оказываются в плазме с ионным потоком, они приобретают значительный отрицательный заряд (10^3 – 10^4 элементарных зарядов) вследствие высокой подвижности электронов и создают за собой возмущенную область (кильватерный ионный след) [21, 22]. Таким образом, одна отрицательно заряженная пылевая частица испытывает как электростатическое отталкивание от одноименно заряженной соседней частицы, так и эффективное притяжение к положительному объемному заряду, возникающему в её кильватерном следе. В коллоидных суспензиях течение жидкости относительно близко расположенных коллоидных частиц также может приводить к нарушению симметрии межчастичного взаимодействия из-за возникающих сил исключенного объема (depletion forces) или энтропийных сил (entropic forces) [2, 12, 23, 24]. В активных коллоидах «невыполнение» третьего закона Ньютона может также возникать из-за по-разному протекающих химических реакций на поверхности активных коллоидных частиц в растворе [25]. В результате на частицу, находящуюся в неоднородном концентрационном поле, создаваемом второй частицей, будет действовать диффузиофоретическая сила, обусловленная градиентом химической концентрации [11, 13]. Если при этом сами частицы будут разного сорта или же, будучи идентичными, иметь химически бифункциональную поверхность

(янус-частицы), то симметрия такого типа взаимодействия между ними будет нарушаться. Целью данной работы является аналитическое описание спектральной плотности колебаний диссипативной системы из двух взаимодействующих частиц во внешнем силовом поле при воздействии случайных сил. При этом мы ограничиваемся случаем слабо диссипативных систем, в которых колебательные процессы затухают лишь на относительно больших временных масштабах (слабо затухают на характерных временах колебаний), т.е. отношение коэффициента трения частиц в среде к эйнштейновской частоте (ν/ω_E) меньше или порядка единицы. В работе представлен аналитический вывод спектральной плотности случайных процессов в рассматриваемой системе с учетом «нарушения» симметрии межчастичного взаимодействия.

2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрим линейную диссипативную систему из двух связанных гармонических осцилляторов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с невязаным межчастичным взаимодействием:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\nu_1 \frac{dx_1}{dt} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, \quad (1a)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\nu_2 \frac{dx_2}{dt} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \quad (1b)$$

Здесь $\nu_{1(2)}$ — коэффициенты трения, а остальные коэффициенты зависят от физики решаемой задачи. Если система (1) находится под воздействием внешних периодических сил $b_{1(2)} = H_{1(2)} \sin(\omega t)$, то в ней будут возникать вынужденные колебания вида $x_{1(2)}(t) = M_{1(2)} e^{i\omega t}$, где

$$M_1 = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} H_1 & -a_{12} \\ H_2 - \omega^2 + i\omega\nu_2 - a_{22} \end{pmatrix},$$
$$M_2 = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} -\omega^2 + i\omega\nu_1 - a_{11} & H_1 \\ -a_{21} & H_2 \end{pmatrix},$$
$$D = \det \begin{pmatrix} -\omega^2 + i\omega\nu_1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -\omega^2 + i\omega\nu_2 - a_{22} \end{pmatrix}.$$

Полагая $H_1 = 1$ и $H_2 = 0$ можно определить частотную передаточную функцию (ЧПФ), связывающую воздей-

ствие на первую частицу с ее откликом:

$$W_1^{(1)}(i\omega) = M_1(i\omega, H_1 = 1, H_2 = 0) = \frac{\omega^2 + a_{22} - i\nu_2\omega}{D}. \quad (2)$$

И наоборот, если $H_1 = 0$ и $H_2 = 1$, то получаем ЧПФ, описывающую отклик первой частицы при воздействии на вторую частицу:

$$W_2^{(1)}(i\omega) = M_1(i\omega, H_1 = 0, H_2 = 1) = \frac{-a_{12}}{D}. \quad (3)$$

Аналогичным образом получаем ЧПФ, описывающие отклик второй частицы при воздействии на первую:

$$W_1^{(2)}(i\omega) = M_2(i\omega, 1, 0) = \frac{-a_{21}}{D}, \quad (4)$$

и при воздействии на вторую частицу:

$$W_2^{(2)}(i\omega) = M_2(i\omega, 0, 1) = \frac{\omega^2 + a_{11} - i\nu_1\omega}{D}. \quad (5)$$

3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Напомним, что если на вход линейной системы подан стационарный случайный процесс с равным нулю средним значением, то спектральная плотность стационарного случайного процесса на выходе линейной системы равна спектральной плотности случайного процесса на входе системы, умноженной на квадрат модуля частотной передаточной функции этой системы [26]. Если процесс $b_j(t)$, действующий в системе (1) на j -й осциллятор, является стационарным, случайным с математическим ожиданием $\langle b_j(t) \rangle = 0$, статистически независимым и характеризуется спектральной плотностью

$$S_j(\omega) = 2 \int_0^\infty \langle b_j(t) b_j(t + \tau) \rangle \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (6)$$

то спектральная плотность вынужденных колебаний k -го осциллятора может быть представлена в виде [26]:

$$G_k(\omega) = \sum_{j=1}^2 \left| W_j^{(k)}(i\omega) \right|^2 S_j, \quad (7)$$

где $W_j^{(k)}(i\omega)$ — ЧПФ, связывающая входной сигнал, подаваемый на j -й осциллятор, с выходным сигналом, регистрируемым на k -м осцилляторе. Используя формулу (7), легко получить выражения для спектральной плотности колебаний двух связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned} G_1(\omega) &= \left| W_1^{(1)} \right|^2 S_1 + \left| W_2^{(1)} \right|^2 S_2 \\ &= \frac{S_1 \left((\omega^2 + a_{22})^2 + \nu_2^2 \omega^2 \right) + S_2 a_{12}^2}{|D|^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} G_2(\omega) &= \left| W_1^{(2)} \right|^2 S_1 + \left| W_2^{(2)} \right|^2 S_2 \\ &= \frac{S_1 a_{21}^2 + S_2 \left((\omega^2 + a_{11})^2 + \nu_1^2 \omega^2 \right)}{|D|^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} |D|^2 &= (\omega^2(\nu_1\nu_2 - \omega^2 - a_{11} - a_{22}) - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})^2 \\ &\quad + \omega^2(\nu_1\omega^2 + \nu_2\omega^2 + \nu_2a_{11} + \nu_1a_{22})^2. \end{aligned}$$

В частном случае, при $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$, $\nu_1 = \nu_2 \equiv \nu$ и $S_1 = S_2 \equiv S$, полученные выражения для спектральных плотностей (8) и (9) можно привести к виду:

$$G_k(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{S}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_j^2)\omega^2 + \omega_j^4}, \quad (10)$$

где ω_j — собственные частоты системы (1), а выражение под знаком суммы представляет собой спектральную плотность классического осциллятора [27, 28].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе определены частотно-передаточные функции диссипативной системы двух связанных осцилляторов. Рассмотрен случай «нарушения» симметрии межчастичного взаимодействия, свойственный некоторым видам коллоидов и пылевой плазмы. Получены аналитические выражения для спектральной плотности колебаний диссипативной системы из двух взаимодействующих частиц во внешнем силовом поле при воздействии случайных сил. Результаты работы могут быть полезны для экспериментального анализа парного взаимодействия между макрочастицами в различных средах, в которых возможно экспериментальное измерение спектральной плотности случайных процессов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-20175.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Melzer A, Schweigert V A and Piel A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 3194–97
2. Dzubiella J, Löwen H and Likos C N 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 248301
3. Hayashi K and Sasa S 2006 *J. Phys.: Condens. Matter* **18** 2825
4. Buenzli P R and Soto R 2008 *Phys. Rev. E* **78** 020102(R)
5. Ivlev A V, Bartnick J, Heinen M, Du C R, Nosenko V and Löwen H 2015 *Phys. Rev. X* **5** 011035
6. Ваулина О С, Лисина И И и Лисин Е А 2015 *ЖЭТФ* **148** 819
7. Bartnick J, Heinen M, Ivlev A V and Löwen H 2015 *J. Phys.: Condens. Matter* **28**(2) 025102
8. Lampe M and Joyce G 2015 *Phys. Plasmas* **22** 023704
9. Bartnick J, Kaiser A, Löwen H and Ivlev A V 2016 *J. Chem. Phys.* **144**(22) 224901
10. Dholakia K and Zemanek P 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1767
11. Sabass B and Seifert U 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 218103
12. Mejia-Monasterio C and Oshanin G 2011 *Soft Matter* **7** 993
13. Soto R and Golestanian R 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 068301
14. Usachev A D *et al* 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 045001
15. Nosenko V, Ivlev A V, Kompaneets R and Morfill G 2014 *Phys. Plasmas* **21** 113701
16. Chen M, Drogmann M, Zhang B, Matthews L S and Hyde T W 2016 *Phys. Rev. E* **94** 033201
17. Ivlev A, Löwen H, Morfill G and Royall C P 2012 *Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-*

- Resolved Studies of Classical Liquids and Solids* (World Scientific Publishing Company)
18. Vladimirov S V, Ostrikov K and Samarian A A 2005 *Physics and Applications of Complex Plasmas* (World Scientific)
 19. Fortov V E and Morfill G E (eds) 2009 *Complex and Dusty Plasmas* (CRC Press)
 20. Райзер Ю П, Шнейдер М Н и Яценко Н А 1995 *Высокочастотный емкостный разряд. Физика. Техника эксперимента. Приложения* (Изд-во МФТИ, Наука. Физматлит)
 21. Hutchinson I H 2012 *Phys. Rev. E* **85** 066409
 22. Kompaneets R, Morfill G E and Ivlev A V 2016 *Phys. Rev. E* **93** 063201
 23. Khair A S and Brady J F 2007 *Proc. Royal Soc. A* **463** 223
 24. Sriram I and Furst E M 2012 *Soft Matter* **8** 3335–41
 25. Bechinger C, Leonardo R D, Löwen H, Reichhardt C, Volpe G and Volpe G 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 045006
 26. Воронов А А (ред.) 1986 *Теория автоматического управления, ч. 2* (Высшая школа)
 27. Климонтович Ю Л 1982 *Статистическая Физика* (Наука)
 28. Ваулина О С и Саметов Э А 2018 *ЖЭТФ* **154** 407